Polarizzazione elettrica e magnetica: dalle equazioni di Maxwell per il vuoto alle equazioni per la materia

Dai corsi di fisica (elettromagnetismo) sono note le equazioni che regolano il campo elettromagnetico nel vuoto e quindi descrivono la dinamica dei campi $\bar{E}(\bar{r},t)$ (campo elettrico) e $\bar{B}(\bar{r},t)$ (induzione magnetica):

$$\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\text{div}\,\bar{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\text{rot}\,\bar{B} = \mu_0 \bar{J}_{TOT} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Segue un breve riepilogo sul significato delle varie equazioni; ρ_{TOT} e $\bar{J}_{TOT}$ rappresentano la densità di carica totale e la densità di corrente totale, rispettivamente: sono le sorgenti del campo elettromagnetico.

Nel caso in cui $\frac{\partial \rho_{TOT}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \bar{J}_{TOT}}{\partial t} = 0$ il campo elettromagnetico si chiama stazionario nel senso che la soluzione di (1)-(4) soddisfa, all'equilibrio, le relazioni $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$: i campi elettrico e magnetico si disaccoppiano. Quando $\frac{\partial \rho_{TOT}}{\partial t} = 0$ e $\bar{J}_{TOT} = 0$ il campo si chiama elettrostatico e si ha $\bar{B} = 0$. L'equazione (1) rappresenta la legge di Gauss e descrive la generazione di campo elettrico a partire dalla carica elettrica (infatti ne segue, come caso particolare la legge di Coulomb). L'equazione (2) rappresenta la legge di Faraday, Neumann e Lenz e descrive la generazione di campo elettrico indotta dalla presenza di campo magnetico tempo-variante. Nel caso stazionario sancisce l'irrotazionalità del campo elettrico e quindi l'esistenza del potenziale elettrico (ne segue, come caso particolare, la legge di

Kirchhoff sulle tensioni elettriche in un circuito) _ Nel caso generico tempo variante non esiste il potenziale elettrico stazionario ma si introducono due potenziali elettromagnetici _
L'equazione (3) rappresenta l'equazione di Gauss magnetica e descrive l'assenza della "carica magnetica" cioè la non esistenza del "monopolo magnetico" _
L'equazione (4) viene detta legge di Ampere generalizzata da Maxwell; nel caso stazionario $\partial \bar{E}/\partial t = 0$ e si ottiene la legge di Ampere che descrive la generazione di induzione magnetica a partire da corrente elettrica _ In regime arbitrariamente tempo variante l'ultimo termine descrive la generazione di induzione magnetica a partire da campo elettrico - tempo variante _ Maxwell introdusse l'equivalenza tra la cosiddetta corrente di spostamento $\varepsilon_0 \partial \bar{E}/\partial t$ ed una densità di corrente _
Ricordiamo infine che le sorgenti ρ_{TOT} e $\bar{J}_{TOT}$ soddisfano la relazione di continuità

$$\frac{\partial \rho_{TOT}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{J}_{TOT} = 0 \qquad (5)$$

che rappresenta la conservazione della carica elettrica. Ne segue che le condizioni di stazionarietà $\frac{\partial \rho_{TOT}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \bar{J}_{TOT}}{\partial t} = 0$ sono equivalenti alle $\frac{\partial J_{TOT}}{\partial t} = 0$ e $\operatorname{div} \bar{J}_{TOT} = 0$.

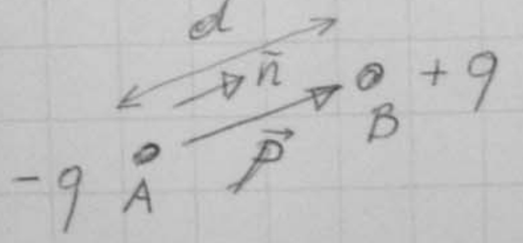
Ricordiamo infine che nel caso generico tempo variante si possono introdurre i potenziali $\varphi(\bar{r},t)$ ed $\bar{A}(\bar{r},t)$ come segue. Da $\operatorname{div} \bar{B} = 0$ (solenoidalità di $\bar{B}$) ne segue che $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$ per un certo campo $\bar{A}$ detto potenziale magnetico vettoriale. Da $\operatorname{rot} \bar{E} = -\partial \bar{B}/\partial t$ segue che $\operatorname{rot} \bar{E} = -\partial/\partial t \operatorname{rot} \bar{A}$ da cui $\operatorname{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0$ (irrotazionalità di $\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$). Esiste pertanto φ tale che $\bar{E} + \partial \bar{A}/\partial t = -\operatorname{grad} \varphi$, cioè:

$$\begin{cases} \bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\ \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A} \end{cases} \qquad (6)$$

Le equazioni (2) e (3) che definiscono i potenziali elettromagnetici si dicono equazioni di struttura. Sostituendo i potenziali (6) nelle equazioni (1) e (4), che descrivono gli effetti delle sorgenti, si ottengono equazioni complete in $\bar{A}$ e φ. Tali relazioni servono, tra le altre cose, all'impostazione variazionale dell'elettromagnetismo.

Dipoli ideali e campi di polarizzazione

Si definisce un dipolo elettrico come una coppia di cariche uguali e opposte $-q$ e $+q$ poste alla distanza d fissa



$(|\bar{n}| = 1)$

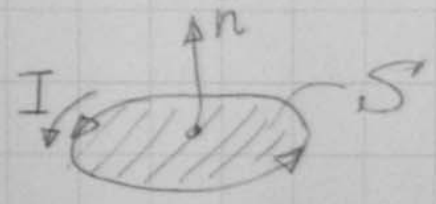
Si definisce poi il momento di dipolo elettrico come

$$\boxed{\bar{p} = q\, d\, \vec{n}} \qquad (7)'$$

dove $\bar{n}$ è il versore diretto da $-q$(A) a $+q$(B)

Il dipolo ideale si ottiene nel limite di $d \to 0$, $q \to +\infty$ mantenendo costante il momento di dipolo $\vec{p}$. Quindi il dipolo ideale si caratterizza con il vettore $\vec{p}$ applicato ad un punto dello spazio ($A \equiv B$).

Si definisce dipolo magnetico come una corrente circolare I (microspira) avente sezione S fissata



$(|\vec{n}| = 1)$

Si definisce poi il momento di dipolo magnetico come

$$\boxed{\vec{m} = I S \vec{n}} \qquad (7)''$$

(i versi di $\vec{n}$ ed I sono descritti dalla regola della mano destra di Ampere)
Per il dipolo ideale $I \to \infty$, $S \to 0$ con $\vec{m}$ finito.

Nelle materia sono presenti, per le ragioni che descriveremo di seguito, distribuzioni complicate di dipoli elettrici e dipoli magnetici, realizzati dai costituenti elementari della materia stessa.
Si definiscono quindi a livello macroscopico i seguenti campi di polarizzazione:

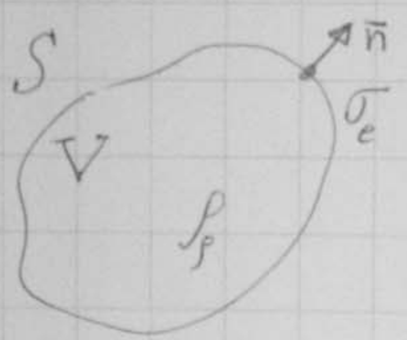
$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}} \quad (8)$$ campo di polarizzazione elettrica

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}} \quad (9)$$ campo di polarizzazione magnetica

$\vec{P}$ ed $\vec{M}$ sono campi vettoriali dipendenti da spazio ($\vec{r}$) e tempo (t).
Dato un volumetto infinitesimo dv esso si comporta come un dipolo elettrico di momento $d\vec{p} = \vec{P} dv$ e come un dipolo magnetico di momento $d\vec{m} = \vec{M} dv$.

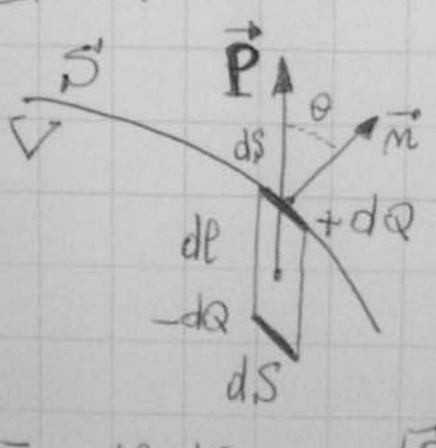
Proprietà della polarizzazione elettrica

Consideriamo un corpo polarizzato con polarizzazione $\vec{P}$ all'interno: esso è equivalente ad un corpo identico con carica superficiale $\sigma_e = \vec{P}\cdot\vec{n}$ e carica volumetrica interna $\rho_e = -\operatorname{div}\vec{P}$:



$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_e &= \vec{P}\cdot\vec{n} \\ \rho_e &= -\operatorname{div}\vec{P} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &[C/m^2] \\ &(10) \\ &[C/m^3] \end{aligned}$$

dim: Consideriamo un punto sulla superficie ed il vettore $\vec{P}$ immediatamente interno:



Si ha $\quad d\bar{p} = dl\,dQ\ \text{vers}(\vec{P})$

$$d\bar{p} = \bar{P}\,dv = \bar{P}\,dl\,dS\cos\theta$$

e quindi $\quad dl\,dQ\ \text{vers}\,\bar{P} = \bar{P}\,dl\,dS\cos\theta$

da cui $\quad dQ\, \text{vers}(\bar{P}) = \bar{P}\, dS' \cos\theta$

$\boxed{dQ\, \text{vers}(\bar{P}) \cdot \bar{n} = \bar{P} \cdot \bar{n}\, dS \cos\theta}$

e infine $\quad \sigma_e = \dfrac{dQ}{dS} = \bar{P} \cdot \bar{m} \qquad \boxed{\dfrac{dQ}{dS} \underbrace{\dfrac{\text{vers}\,\bar{P} \cdot \bar{n}}{\cos\theta}}_{1} = \bar{P} \cdot \bar{n}}$

Poi, visto che la carica di polarizzazione totale deve essere nulla si deve avere:

$$\int_S \sigma_e\, dS + \int_V \rho_e\, dV = 0$$

cioè $\quad \displaystyle\int_S \bar{P} \cdot \bar{m}\, dS + \int_V \rho_e\, dV = 0$

Per il teorema della divergenza:

$$\int_V (\text{div}\, \bar{P} + \rho_e)\, dV = 0$$

da cui $\quad \rho_e = -\,\text{div}\, \bar{P}$ $\qquad$ c.v.d.

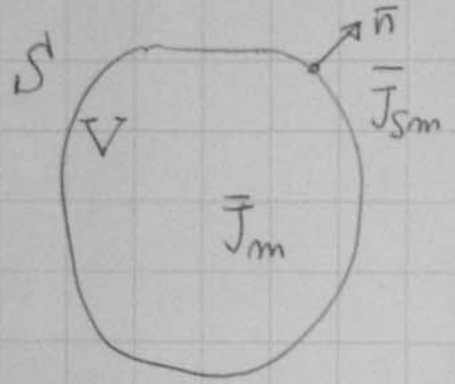
Nel caso tempo-varianti la carica di polarizzazione deve soddisfare la continuità

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}\, \bar{J}_e = 0 \rightarrow -\text{div}\, \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \text{div}\, \bar{J}_e = 0$$

da cui $\quad \boxed{\bar{J}_e = \dfrac{\partial \bar{P}}{\partial t}} \qquad (11)$

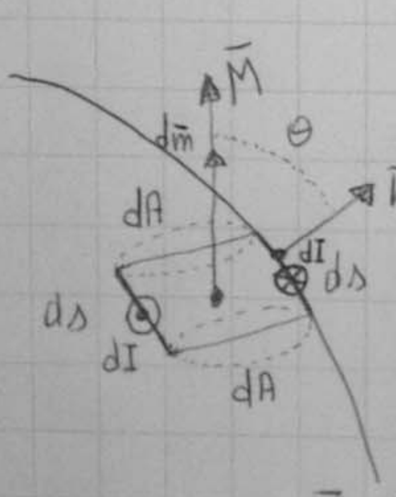
Proprietà della polarizzazione magnetica

Un corpo magnetizzato con vettore polarizzazione $\bar{M}$ equivale ad un corpo con densità di corrente superficiale $\bar{J}_{sm} = \bar{M} \wedge \bar{n}$ (sm = superficiale magnetica) e densità di corrente volumetrica $\bar{J}_m = \text{rot}\,\bar{M}$



$$\boxed{\begin{aligned} \bar{J}_{sm} &= \bar{M} \wedge \bar{n} \quad [A/m] \\ \bar{J}_m &= \text{rot}\,\bar{M} \quad [A/m^2] \end{aligned}} \qquad (12)$$

<u>dim</u>: Considero un punto sulla superficie ed il vettore $\bar{M}$ immediatamente interno:



$d\bar{m} = \text{vers}\,\bar{M}\; dI\, dA$

$\bar{M}$ e $d\bar{m} \perp dA$

$d\bar{m} = \bar{M}\, dv$

$dv = dA\, ds\, \sin\theta$

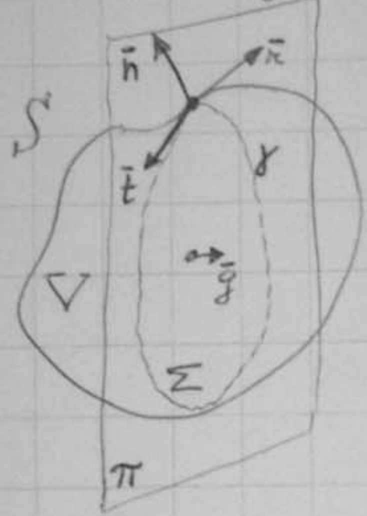
$d\bar{m} = \bar{M}\, dA\, ds\, \sin\theta$

$$\text{vers}\,\bar{M}\, dI = \bar{M}\, ds\, \sin\theta$$

memo $\boxed{\text{vers } \bar{M} \wedge \bar{n} \ \frac{dI}{dS} = \bar{M} \wedge \bar{n} \sin\theta} \rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\text{vers } \bar{M} \wedge \bar{n}}{\sin\theta}}_{\text{versore tangente a } S \perp (\bar{n} \text{ ed } \bar{m})} \frac{dI}{dS} = \bar{M} \wedge \bar{n}}$

$$|\bar{J}_{sm}| = \frac{dI}{ds} \quad e \quad \bar{J}_{sm} \perp \bar{M} \text{ ed } \bar{m}$$

e quindi $\bar{J}_{sm} = \bar{M} \wedge \bar{m}$. Poi:



dove
- π è un piano che seziona V
- $\bar{r}$ versore
- γ è il bordo di Σ
- $\bar{g}$ versore $\perp \Sigma$
- $\bar{r} \parallel S$ e $\bar{r} \perp \gamma$
- $\bar{n} \perp S$ e $\bar{n} \perp \gamma$
- $\bar{t} \parallel \gamma$

la corrente netta che attraversa Σ-γ deve essere nulla per il carattere dipolare delle correnti:

corrente volumetrica — corrente superficiale

$$\int_{\Sigma} \bar{J}_m \cdot \bar{g} \, dS + \int_{\gamma} \bar{J}_{sm} \cdot \bar{r} \, ds = 0$$

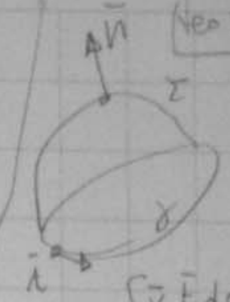
$$\int_{\Sigma} \bar{J}_m \cdot \bar{g} \, dS + \int_{\gamma} \bar{M} \wedge \bar{m} \cdot \bar{r} \, ds = 0$$

$$\int_{\Sigma} \bar{J}_m \cdot \bar{g} \, dS + \int_{\gamma} \bar{M} \cdot \bar{m} \wedge \bar{r} \, ds = 0$$

ma $-\bar{n} \wedge \bar{r} = \bar{t}$ dove $\bar{t}$ è il versore tangente alla linea γ, quindi:

$$\int_{\Sigma} \bar{J}_m \cdot \bar{g}\, dS' - \int_{\gamma} \bar{M} \cdot \bar{t}\, ds = 0$$

Teo Stokes



$$\int_{\gamma} \bar{v} \cdot \bar{t}\, ds = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\, \bar{v}\, dS$$

Per il teorema di Stokes:

$$\int_{\Sigma} \bar{J}_m \cdot \bar{g}\, dS' - \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\, \bar{M} \cdot \bar{g}\, dS' = 0$$

e quindi $\bar{J}_m = \mathrm{rot}\, \bar{M}$ — c.v.d.

Si noti infine che la continuità delle correnti magnetiche comporta

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \mathrm{div}\, \bar{J}_m = 0$$

ma $\bar{J}_m = \mathrm{rot}\, \bar{M}$ e $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \bar{M}) = 0$ sempre quindi la carica ρ_m è sempre nulla:

$$\boxed{\rho_m = 0} \qquad (13)$$

<u>Contributi totali alle eq. di Maxwell</u>:

$$\begin{cases} \rho_{TOT} = \rho + \rho_e + \rho_m = \rho - \mathrm{div}\, \bar{P} \\ \bar{J}_{TOT} = \bar{J} + \bar{J}_e + \bar{J}_m = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\, \bar{M} \end{cases} \qquad (14)$$

Equazioni di Maxwell nella materia

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \operatorname{div} \bar{E} = \rho - \operatorname{div} \bar{P} \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ \dfrac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \bar{B} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \bar{M} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

avendo sostituito (14) in (1-2-3-4) -

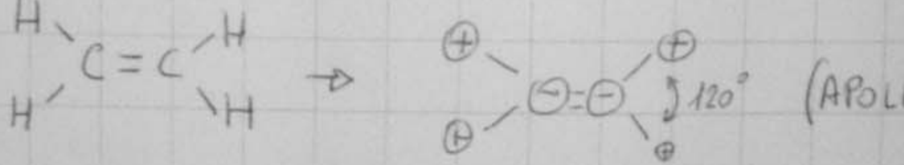
Si definiscono i campi:

$$\begin{cases} \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} & \text{Vettore spostamento elettrico} \\ \bar{H} = \dfrac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} & \text{vettore campo magnetico} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{D} = \rho \\ &\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ &\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned}} \qquad (15)$$

Fenomeno della polarizzazione elettrica

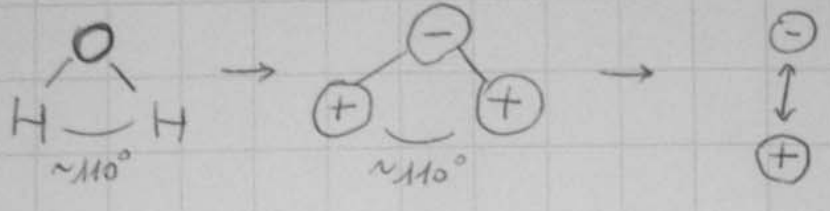
- Polarizzazione di tipo elettronico: in un atomo isolato il baricentro delle cariche positive e quello delle cariche negative coincidono; quando un campo viene applicato si viene a determinare una separazione dei baricentri prima coincidenti con la nascita di un dipolo elettrico ($d \simeq 1$ Å). Tutti gli atomi si polarizzano parallelamente ottenendo un campo di polarizzazione nella materia.
- Polarizzazione di tipo atomico: non interessa gli elettroni di un atomo ma gli atomi di una molecola. Per esempio l'acetilene all'equilibrio ha una distribuzione di carica



(APOLARE)

che è simmetrica con momento nullo. Con campo elettrico applicato la struttura molecolare si deforma separando i baricentri delle cariche positive e negative. Si forma quindi un momento di dipolo per ciascuna molecola ed un campo di polarizzazione nella materia.

- Polarizzazione per orientazione: è il fenomeno che si presenta con molecole polari come l'H_2O:



(POLARE)

Ogni molecola si comporta come un dipolo elettrico. Senza campi applicati tutte le molecole (dipoli) sono orientate casualmente e il campo di polarizzazione $\overline{P}$ è nullo. Con campo applicato i dipoli si equiorientano (compatibilmente con l'agitazione termica) generando una polarizzazione netta.

Mezzi lineari

In ogni caso, sotto l'ipotesi di linearità si ha:

$$\boxed{\overline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}} \qquad (16)$$

da cui:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e \overline{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{E}$$

dove $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ è detta permettività elettrica relativa.

Polarizzazione elettronica nei metalli: modello di Drude

Consideriamo un reticolo metallico con N elettroni liberi per unità di volume. Con il campo applicato ciascun elettrone segue un moto dato da:

$$q\bar{E} - k\vec{v} = m\vec{a}$$

dove q è la carica (negativa), k la costante d'attrito ed m la massa. Con il metodo dei fasori:

$$q\dot{E}_x - kj\omega\dot{x} = -\omega^2 m\dot{x}$$

$$q\dot{E}_x = (kj\omega - m\omega^2)\dot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{q\dot{E}_x}{jk\omega - \omega^2 m} \rightarrow \vec{r} = \frac{q\vec{E}}{jk\omega - \omega^2 m}$$

Il vettore polarizzazione sarà allora

$$\bar{P} = Nq\vec{r} = \frac{Nq^2}{jk\omega - \omega^2 m}\vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\chi_e = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{\omega(jk - \omega m)} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{j\omega(k + j\omega m)} =$$

$$= \frac{Nq^2}{k\varepsilon_0}\frac{1}{j\omega\left(1 + j\omega\frac{m}{k}\right)}$$

Il vettore densità di corrente:

$$\bar{J} = Nq\bar{v} = Nq\jmath\omega\bar{r} = \jmath\omega\bar{P} =$$

$$= \frac{\jmath\omega Nq^2}{\jmath k\omega - \omega^2 m}\bar{E} =$$

$$= \frac{Nq^2}{k + \jmath\omega m}\bar{E} = \frac{Nq^2}{k}\frac{1}{1+\jmath\omega\frac{m}{k}}$$

se $\omega \to 0 \Rightarrow \vec{J} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{Nq^2}{k}}$

si pone poi $\boxed{\tau = \frac{m}{k}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_e &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{\jmath\omega(1+\jmath\omega\tau)} \\ \sigma(\omega) &= \sigma(0)\frac{1}{1+\jmath\omega\tau} \end{aligned}}$$

Relazioni di Drude. (17)

la costante di tempo τ si può valutare così:

$$k = \frac{Nq^2}{\sigma} \to \tau = \frac{m\sigma}{Nq^2}$$

e dipende da grandezze note (m, σ, N, q).

Polarizzazione elettronica nei dielettrici:

modello di Drude - Lorentz

$i = 1..n$ specie atomiche presenti

N_i = atomi specie i-esima per unità volume

n_i = numero di elettroni ottici atomi i

$\overline{r}_i$ = ampiezza spostamento

$$\overrightarrow{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \sum_{i=1}^{n} N_i n_i q \vec{r}_i$$

moto elettrone generico

$$\underbrace{qE_x}_{\text{campo esterno}} \underbrace{- b\dot{X}}_{\substack{\text{forza armonica}\\ \text{legante}}} \underbrace{- K v_x}_{\text{attrito}} = \underbrace{m a_x}_{\text{inerzia}}$$

$$q\dot{E}_x - b\dot{X} - KJ\omega\dot{X} = -m\omega^2\dot{X}$$

$$\left(b + J\omega K - m\omega^2\right)\dot{X} = q\dot{E}_x$$

$$\dot{X} = \frac{q\dot{E}_x}{b + J\omega K - m\omega^2} =$$

$$= \frac{q}{m} E_x \frac{1}{\frac{b}{m} - \omega^2 + J\omega\frac{K}{m}}$$

$$\frac{b}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{K}{m} = \tau$$

$$\vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\tau}$$

nella specie atomica i-esima:

$$\vec{r}_i = \frac{q}{m} \vec{E} \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j\omega\tau_i}$$

da cui

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} N_i m_i \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j\omega\tau_i} \vec{E}$$

$$\boxed{\chi_e = \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i m_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j\omega\tau_i}} \qquad (18)$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \sum_{i=1}^{N} \frac{N_i m_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j\omega\tau_i} =$$

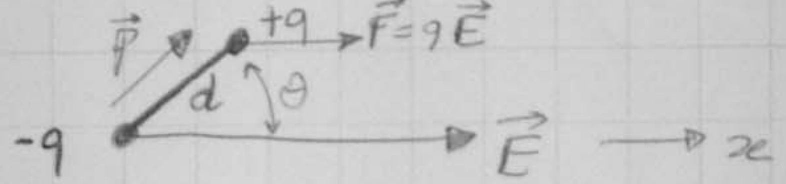
$$= 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \sum_{i=1}^{N} N_i m_i \frac{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - j\omega\tau_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau_i^2} = \varepsilon_r' + j\varepsilon_r''$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r' = 1 + \dfrac{q^2}{\varepsilon_0 m} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N_i m_i \dfrac{\omega_{0i}^2 - \omega^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau_i^2} \\ \varepsilon_r'' = - \dfrac{q^2}{\varepsilon_0 m} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} N_i m_i \dfrac{\omega\tau_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\tau_i^2} \end{cases}$$

Polarizzazione per orientamento: teoria di Langevin

Le molecole polari possiedono un momento di dipolo elettrico intrinseco non nullo. Tali molecole si orientano parallelamente al campo elettrico applicato generando una polarizzazione netta nella materia.

Consideriamo, per fissare le idee, un dipolo libero di ruotare sulla carica $-q$:



La forza $\overline{F} = q\overline{E}$ corrisponde al potenziale elettrico $U = -qE_x x$ visto che $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$.
All'equilibrio termodinamico la posizione x di $+q$ segue la distribuzione di Boltzmann

$$w(x) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(x)}{KT}} = \frac{1}{Z} e^{\frac{qE_x x}{KT}} \quad (19)$$

dove la funzione di partizione si determina imponendo $\int_{-d}^{+d} w(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$Z = \int_{-d}^{+d} e^{\frac{qE_x x}{KT}} dx = \frac{KT}{qE_x}\left(e^{\frac{qE_x d}{KT}} - e^{-\frac{qE_x d}{KT}}\right)$$

Il valore medio della componente di dipolo lungo x vale

$$\langle p_x \rangle = \int_{-d}^{+d} \vec{p}\cdot\vec{e}_x\, w(x)\, dx =$$

$$= \int_{-d}^{+d} p\,\frac{x}{d}\,\frac{1}{Z}\, e^{\frac{qE_x x}{KT}}\, dx =$$

$$\boxed{\alpha = \frac{pE_x}{KT}}$$

$$= \int_{-d}^{+d} \frac{p}{dZ}\, x e^{\frac{qE_x x}{KT}} dx \quad \text{ma}$$

$$\int x e^{\tilde{\alpha} x} dx = \frac{1}{\tilde{\alpha}} e^{\tilde{\alpha} x}\left(x - \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right) + \text{costante quindi}$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{p}{dZ}\,\frac{KT}{qE_x}\left\{ e^{\frac{qE_x}{KT}d}\left(d - \frac{KT}{qE_x}\right) - e^{-\frac{qE_x d}{KT}}\left(-d - \frac{KT}{qE_x}\right)\right\} =$$

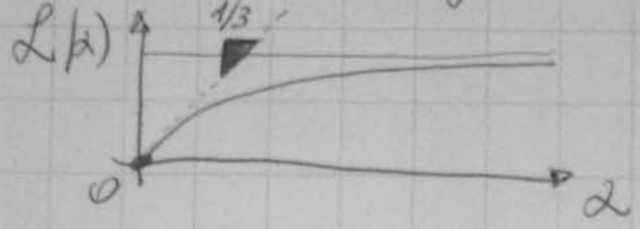
$$= \frac{p}{d}\,\frac{KT}{qE_x}\,\frac{qE_x d}{KT}\,\frac{1}{2\sinh\alpha}\left\{ e^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + e^{-\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\} =$$

$$= p\,\frac{1}{2\sinh\alpha}\left\{ e^{\alpha} + e^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)\right\} =$$

$$= p\,\frac{1}{\sinh\alpha}\left\{ \cosh\alpha - \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle p_x \rangle = p\cdot\left\{\coth\alpha - \frac{1}{\alpha}\right\}} \boxed{= p\cdot\mathcal{L}(\alpha)} \quad (20)$$

dove $\mathcal{L}(\alpha) = \coth\alpha - \frac{1}{\alpha}$ è detta funzione di Langevin.



Nella relazione $\langle P_x \rangle = P \cdot \mathcal{L}(\alpha)$ il valore di α è dato da $\frac{PE_x}{KT}$ quindi se $T \to 0$ oppure $E_x \to +\infty$ si ha $\langle P_x \rangle = P$; inoltre se $T \to +\infty$ o $E_x \to 0$ si ha $\langle P_x \rangle = 0$.

Per temperature sufficientemente alte $\alpha \ll 1$ e quindi:

$$\boxed{\langle P_x \rangle = \frac{P^2 E_x}{3KT}} \quad (21)$$

Se N è il numero di molecole per unità di volume si ha

$$\vec{P} = N \langle P_x \rangle \vec{e}_x = \frac{NP^2}{3kT} \vec{E} \quad \text{(alte T)}$$

$$\vec{P} = N \langle P_x \rangle \bar{e}_x = NP \frac{\bar{E}}{|\bar{E}|} \mathcal{L}\left(\frac{\bar{P} \cdot \bar{E}}{kT}\right) \quad \text{(in generale)}$$

Per alte temperature $\boxed{\chi_e = \frac{NP^2}{3\varepsilon_0 kT}}$ (22)

Fenomeni magnetici nella materia

Supponiamo comportamento lineare per la magnetizzazione:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}$$

Usiamo questa relazione nella definizione di $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} =$$

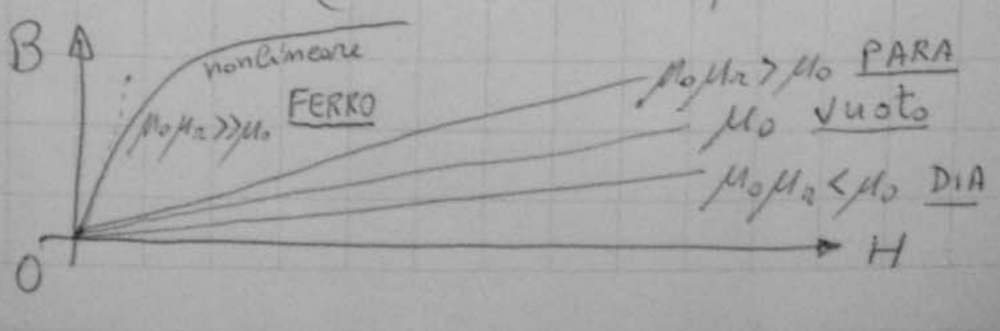
$$= \frac{1}{\mu_0} (1 - \chi_m) \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \qquad (23)$$

dove $\mu_r = \dfrac{1}{1 - \chi_m}$ si chiama

permeabilità magnetica relativa.

In natura esistono tre tipi di magnetizzazione:

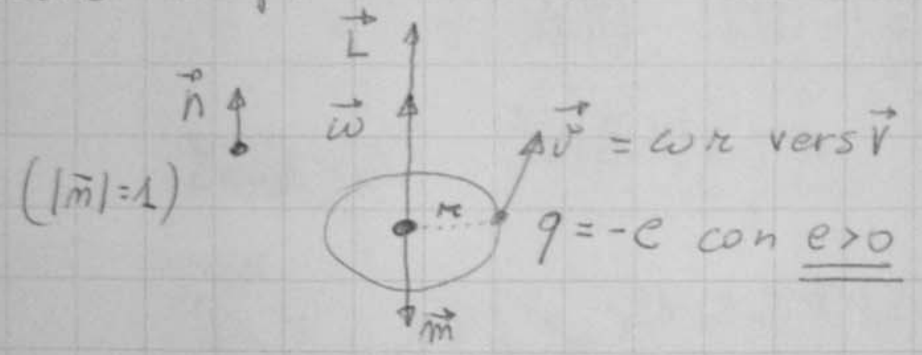
1) DIAMAGNETISMO $(\chi_m \simeq -10^{-5})$
2) PARAMAGNETISMO $(\chi_m \simeq +10^{-3})$
3) FERROMAGNETISMO (χ_m alto e comportamento nonlineare)



Origini del magnetismo → moto orbitale elettronico / spin elettronico / spin nucleare.

Diamagnetismo

Gli atomi o molecole dei mezzi diamagnetici hanno momento magnetico nullo senza campi applicati. Consideriamo il momento di dipolo magnetico associato ad un moto circolare uniforme di un elettrone:



Il momento della quantità di moto vale

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\omega r \text{ vers}\vec{v} = mr^2\vec{\omega}$$

Il momento di dipolo magnetico vale:

$$\vec{m} = IS\vec{n} = -\pi r^2 \frac{e}{T}\vec{n} = -\pi r^2 \frac{e}{2\pi}\omega\vec{n} =$$

$$= -\frac{er^2}{2}\vec{\omega}$$

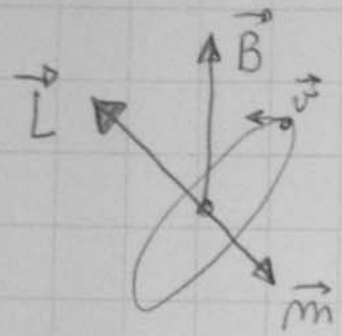
da cui :

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2m}\vec{L}} \quad (24)$$

Per la seconda legge della dinamica

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

la spira risente di $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ sotto l'effetto del campo magnetico, quindi:



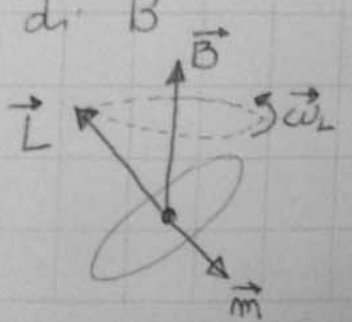
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

e tramite la (24) si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{e}{2m}\,\vec{L} \wedge \vec{B} = \frac{e}{2m}\,\vec{B} \wedge \vec{L}$$

un vettore $\vec{W}$ che ruota con velocita' angolare $\vec{\omega}_w$ segue la legge $\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{\omega}_w \wedge \vec{W}$

quindi $\vec{L}$ ruota con velocita' angolare $\boxed{\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m}\vec{B}}$ attorno all'asse di $\vec{B}$ (precessione di Larmor):



La precessione di Larmor genera un momento di dipolo dato da

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2}\langle r^2\rangle \vec{\omega}_L = -\frac{e^2}{4m}\langle r^2\rangle \vec{B}$$

dove $\langle r^2\rangle$ è la distanza quadratica media dell'elettrone dall'asse di $\vec{B}$

Visto che $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle$ e che $\langle R^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$ è il raggio quadratico medio dell'orbita dal centro si ha $\langle r^2\rangle = \frac{2}{3}\langle R^2\rangle$:

$$\boxed{\vec{m}_L = -\frac{e^2}{6m}\langle R^2\rangle \vec{B}} \quad (25)$$

Si noti che $\vec{m}_L$ è opposto a $\vec{B}$ nel diamagnetismo. La magnetizzazione per Z elettroni e per N atomi per unità di volume:

$$\boxed{\vec{M} = -\frac{e^2}{6m} N Z \langle R^2\rangle \vec{B}} \quad (26)$$

Visto che $\chi_m = \mu_0 \frac{M}{B}$ si ottiene:

$$\boxed{\chi_m = -\frac{\mu_0 e^2}{6m} N Z \langle R^2 \rangle} \quad (27)$$

Questa è la legge di Curie (1895) che spiega l'indipendenza del diamagnetismo dalla temperatura. ($\chi_m \simeq -10^{-5}$).

Infine:

$$\boxed{\mu_r} = \frac{1}{1-\chi_m} = \boxed{\frac{1}{1+\frac{\mu_0 e^2}{6m} N Z \langle R^2 \rangle}} < 1 \quad (28)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r < \mu_0.$$

Paramagnetismo

Si presenta nei materiali dove gli atomi o le molecole possiedono un momento di dipolo magnetico intrinseco. Quando un campo magnetico viene applicato alla materia tali dipoli tendono a orientarsi nella medesima direzione generando un campo di polarizzazione magnetica macroscopica. L'effetto è analogo alla polarizzazione elettrica per orientamento. L'analogia è completa anche dal punto di vista matematico infatti l'eq. (20) di pag. 21 continua ad essere valida con le opportune variazioni:

$$\boxed{\langle m_x \rangle = m\, \mathcal{L}\left(\frac{m B_x}{KT}\right)} \qquad (29)$$

dove $\mathcal{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ è la funzione di Langevin. Visto che $\mathcal{L}(x) \simeq \frac{1}{3}x$ per $x \ll 1$, otteniamo per alte temperature ($KT \gg m B_x$) la relazione più semplice:

$$\boxed{\langle m_x \rangle = \frac{m^2 B_x}{3KT}} \qquad (30)$$

Se N è il numero di atomi o molecole per unità di volume, si ha:

$$\vec{M} = N \langle m_x \rangle \vec{e}_x =$$

$$= \frac{N m^2}{3KT} \vec{B} \qquad (31)$$

ma, in generale, $\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}$

e quindi:

$$\boxed{\chi_m = \frac{\mu_0 N m^2}{3KT}} \qquad (32)$$

(che è analoga alla formula (22) di pag. 22)

Infine:

$$\mu_r = \frac{1}{1-\chi_m} = \boxed{\frac{1}{1-\frac{\mu_0 N m^2}{3KT}}} > 1 \qquad (33)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r > \mu_0$$

Per materiali paramagnetici si ha circa $\chi_m \approx 10^{-3}$. Ne segue che materiali diamagnetici e paramagnetici sono assimilabili al vuoto con errore trascurabile.

Ferromagnetismo

Si tratta di materiali con atomi e/o molecole aventi un dipolo magnetico permanente. Inoltre tali dipoli interagiscono fortemente, tendendo a orientarsi parallelamente. Sotto una certa temperatura T_c (di Curie) essi sono ben orientati, sopra perdono tale proprietà. Per $T > T_c$ si sente ancora l'effetto di interazione e quindi tutto va come se avessimo un paramagnete i cui dipoli risentono di un campo maggiore di quello applicato (teoria di campo medio). La relazione tra $\vec{M}$ e $\vec{B}$ diventa:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \left(\vec{B} + \vec{B}_{ex} \right)} \qquad (34)$$

dove $\vec{B}_{ex}$ è proporzionale alla magnetizzazione stessa (λ è una costante)

$$\boxed{\vec{B}_{ex} = \lambda \mu_0 \vec{M}} \qquad (35)$$

quindi:
$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \left(\vec{B} + \lambda \mu_0 \vec{M} \right) =$$
$$= \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} + \lambda \chi_m \vec{M}$$
$$\vec{M}\left(1 - \lambda \chi_m\right) = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}$$
$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 - \lambda \chi_m} \vec{B}$$

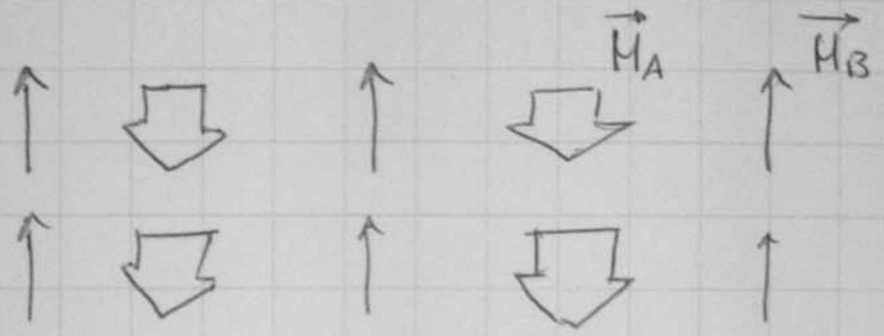
Dalle (22) si ha per un paramagnete $\chi_m = C/T$, formula che consideriamo ancora valida:
$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{C/T}{1 - \lambda\, C/T} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{C}{T - \lambda C} \vec{B}$$

e quindi
$$\boxed{\chi_m^{eff} = \frac{C}{T - \lambda C}} \qquad (36)$$

dove $T_c = \lambda C$ e' detta temperatura di Curie.

Ferrimagnetismo e antiferromagnetismo

Al di sotto di una certa temperatura i dipoli relativi a due sottoreticoli hanno orientazione opposta (risultante nulla)



($FeO \cdot Fe_2O_3$, $CdO \cdot Fe_2O_3$, $MgO \cdot Fe_2O_3$)

La magnetizzazione totale è data da $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B$ con $\vec{M}_A$ e $\vec{M}_B$ contributi dei due componenti del doppio reticolo.

$$\begin{cases} \vec{M}_A = \dfrac{1}{\mu_0} \chi_A \left(\vec{B} - \lambda \mu_0 \vec{M}_A - \mu \mu_0 \vec{M}_B \right) \\ \vec{M}_B = \dfrac{1}{\mu_0} \chi_B \left(\vec{B} - \mu \mu_0 \vec{M}_A - \nu \mu_0 \vec{M}_B \right) \end{cases}$$

dove λ, μ e ν sono tre costanti > 0 che descrivono tre differenti interazioni antiferromagnetiche.

memo

Si pone $\chi_A = \frac{C_A}{T}$; $\chi_B = \frac{C_B}{T}$ e si risolve rispetto a $\vec{M}_A$ e $\vec{M}_B$:

$$\begin{cases} \vec{M}_A = \dfrac{C_A\left(T + \nu C_B - \mu C_B\right)}{\mu_0\left[T^2 + T\left(\lambda C_A + \nu C_B\right) + C_A C_B\left(\lambda\nu - \mu^2\right)\right]}\vec{B} \\ \vec{M}_B = \dfrac{C_B\left(T + \lambda C_A - \mu C_A\right)}{\mu_0\left[T^2 + T\left(\lambda C_A + \nu C_B\right) + C_A C_B\left(\lambda\nu - \mu^2\right)\right]}\vec{B} \end{cases}$$

e quindi $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B$

ma $\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\chi_m^{eff}\vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi_m^{eff} = \mu_0 \frac{\left|\left(\vec{M}_A + \vec{M}_B\right)\right|}{|\vec{B}|} \Rightarrow$$

$$\chi_m^{eff} = \frac{C_A T + C_B T + \nu C_A C_B - \mu C_A C_B + \lambda C_A C_B - \mu C_A C_B}{T^2 + T\left(\lambda C_A + \nu C_B\right) + C_A C_B\left(\lambda\nu - \mu^2\right)}$$

$$\boxed{\chi_m^{eff} = \frac{T\left(C_A + C_B\right) + \left(\nu + \lambda - 2\mu\right) C_A C_B}{T^2 + T\left(\lambda C_A + \nu C_B\right) + C_A C_B\left(\lambda\nu - \mu^2\right)}} \quad (37)$$

Tale formula fitta perfettamente materiali come $FeO \cdot Fe_2O_3$ -

Se $C_A = C_B = C$ e $\lambda = \nu = \varepsilon$ i due materiali componenti sono simmetrici ed il metto si chiama antiferromagnetico (ferrimagnetico + simmetrico) -

Si ottiene:

$$\chi_m^{eff} = 2C \frac{T + C(\varepsilon - \mu)}{T^2 + 2T\varepsilon C + C^2(\varepsilon^2 - \mu^2)}$$

Quindi $\vec{M} = 0$ quando $T = T_N = C(\mu - \varepsilon)$ (temperatura di Néel); inoltre:

$$\boxed{\chi_m^{eff}} = 2C \frac{T + C(\varepsilon - \mu)}{[T + C(\varepsilon + \mu)][T + C(\varepsilon - \mu)]} =$$

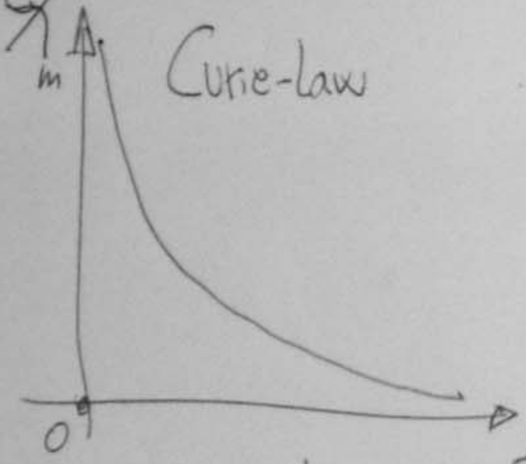
$$= \frac{2C}{T + C(\varepsilon + \mu)} = \boxed{\frac{2C}{T + T_C}} \quad (38)'$$

dove $T_C = C(\mu + \varepsilon)$ è detta temperatura di Curie. Si ha:

$$\boxed{\frac{T_C}{T_N} = \frac{\mu + \varepsilon}{\mu - \varepsilon}} \quad (38)''$$

Riepilogo proprietà magnetiche con la temperatura

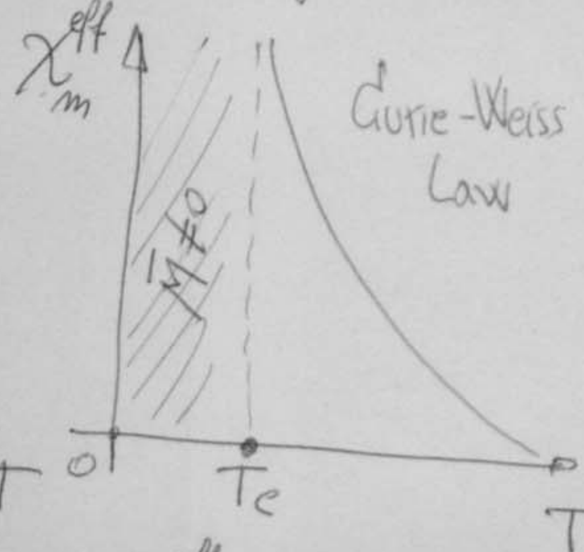
Paramagnetismo



$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

[eq.(32) pag.29]

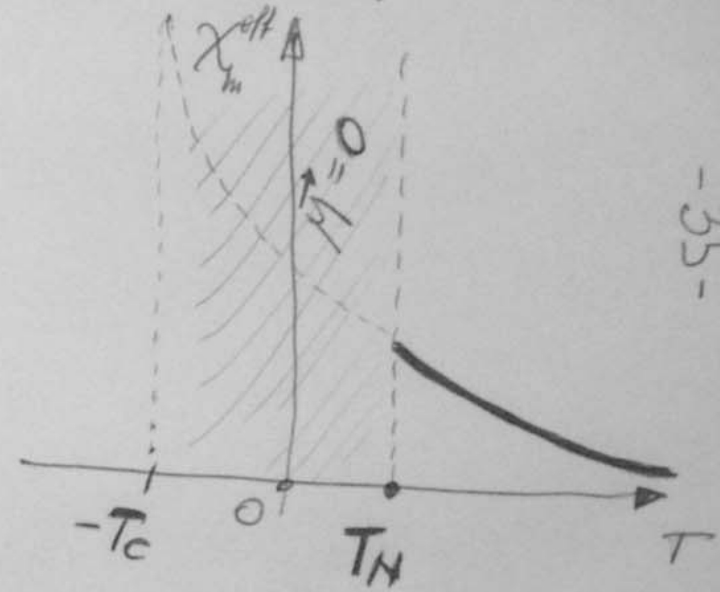
Ferromagnetismo



$$\chi_m^{eff} = \frac{C}{T - T_c} \quad (T > T_c)$$

[eq.(36) pag. 31]

Antiferromagnetismo



$$\chi_m^{eff} = \frac{2C}{T + T_c} \quad T > T_N$$

[eq.(38)' pag. 34]

NOTA SULLE UNITÀ DI MISURA PER χ_e (pol. per orientamento) E PER χ_m (paramagnetismo)

1) $$\boxed{\chi_e = \frac{N p^2}{3 \varepsilon_0 K T}}$$ (p = momento di dipolo elettrico)

$N \rightarrow 1/m^3$ $\quad p \rightarrow C \cdot m$

$\varepsilon_0 \rightarrow F/m$ $\quad KT \rightarrow J$

$$[\chi_e] = \frac{1}{m^3} \frac{C^2 \cdot \cancel{m^2}}{\frac{F}{\cancel{m}} \cdot J}$$

(dalla relazione $i = C \frac{dV}{dt}$ per un condensatore si ha: $F = \frac{A \cdot sec}{V}$)

$$[\chi_e] = \frac{C^2}{F \cdot J} = \frac{C^2}{\frac{A \cdot sec}{\cancel{V}} \cdot \cancel{V} \cdot \cancel{C}} =$$

$$= \frac{C}{A \cdot sec} = \frac{C}{\frac{C}{sec} \cdot sec} = 1 \rightarrow \underline{\text{ADIMENSIONALE}}$$

2) $$\boxed{\chi_m = \frac{\mu_0 N m^2}{3KT}}$$ (m = momento di dipolo magnetico)

$\mu_0 \to H/m$ $\qquad m \Rightarrow A \cdot m^2$

$N \Rightarrow 1/m^3$ $\qquad KT \to J$

$$[\chi_m] = \frac{H}{\cancel{m}} \frac{1}{\cancel{m^3}} A^2 \cancel{m^4} \frac{1}{J}$$

(dalla relazione $v = L \frac{di}{dt}$ per una induttanza si ha $H = \frac{V \cdot sec}{A}$)

$$[\chi_m] = \frac{H A^2}{J} = \frac{\cancel{V} \cdot sec}{\cancel{A}} \cdot \frac{A^2}{\cancel{V} \cdot C} =$$

$$= \frac{sec \cdot A}{C} = \frac{sec \cdot \frac{C}{sec}}{C} = 1$$

ADIMENSIONALE

Energia elettromagnetica in materiali con polarizzazione elettrica e magnetica arbitrarie

$\boxed{\text{mezzi qualsiasi nonlineari}}$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla}\wedge\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} \\ \bar{\nabla}\wedge\bar{E} = -\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\rho = \Sigma q_i\, \delta(\bar{r}-\bar{r}_i) \qquad \bar{r}_i = \bar{r}_i(t)$$

$$\bar{J} = \Sigma q_i \vec{v}_i\, \delta(\bar{r}-\bar{r}_i) \qquad \bar{v}_i = \bar{v}_i(t)$$

↑ carica e densità di corrente libere (cioè non dovute alla polarizzazione del mezzo)

Prendiamo un volume V e poi facciamo il limite $V \to \mathbb{R}^3$ -

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i \underbrace{\frac{d\bar{v}_i}{dt}}_{} =$$

$$= \sum_i m_i \bar{v}_i \overbrace{\frac{q_i}{m_i}\left(\bar{v}_i \wedge \bar{B} + \bar{E}\right)}^{\vec{F}=m\vec{a}} =$$

$$= \sum_i \underbrace{\cancel{q_i \bar{v}_i \cdot \left(\bar{v}_i \wedge \bar{B}\right)}}_{0} + \sum_i q_i \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{E} =$$

$$= \int_V \bar{J} \cdot \bar{E} \, dv =$$

$$= \int_V \left(\bar{\nabla} \wedge \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \cdot \bar{E} \, dv =$$

$$\boxed{\bar{\nabla}\left(\bar{A} \wedge \bar{B}\right) = \bar{B}\,\bar{\nabla} \wedge \bar{A} - \bar{A}\,\bar{\nabla} \wedge \bar{B}}$$

$$= \int_V \left[\bar{\nabla} \wedge \bar{H} \cdot \bar{E} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{E}\right] dv =$$

$$= \int_V \left[\bar{\nabla} \cdot \left(\bar{E} \wedge \bar{H}\right) + \bar{H} \cdot \bar{\nabla} \wedge \bar{E} - \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right] =$$

$$= \int_\Sigma \bar{E} \wedge \bar{H} \cdot \bar{n} \, ds + \int_V \left[-\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right] dv$$

Se $V \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i\right] = -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\sigma}$$

Supponendo che sulle particelle non agisca altro che il campo elettromagnetico da loro prodotto si avrà:

$$U(t) = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 + U_e + U_m$$

energia interna del sistema universo.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{d}{dt} U_e + \frac{d}{dt} U_m =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\sigma + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} u_e \, d\sigma + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} u_m \, d\sigma$$

u_e, u_m densità di energia elettrica e magnetica.

Il sistema è isolato e quindi l'energia si deve conservare da cui

$$\begin{cases} \dfrac{du_e}{dt} = \bar{E} \cdot \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \dfrac{du_m}{dt} = \bar{H} \cdot \dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Supponendo che $\bar{B}$ ed $\bar{H}$ siano legati in modo biunivoco ed anche $\bar{E}$ e $\bar{D}$:

$$\begin{cases} \dfrac{du_e(\bar{D})}{dt} = \bar{E}(\bar{D}) \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \dfrac{du_m(\bar{B})}{dt} = \bar{H}(\bar{B}) \dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$

differenziali esatti

ma allora

$$\bar{E}(\bar{D}) = \frac{\partial u_e(\bar{D})}{\partial \bar{D}}$$

$$\bar{H}(\bar{B}) = \frac{\partial u_m(\bar{B})}{\partial \bar{B}}$$

Quindi le energie specifiche elettriche sono funzioni tali che le equazioni costitutive si scrivano come indicato.

nota

Problema data $\bar{E}(\bar{D}) = \frac{\partial u_e(\bar{D})}{\partial \bar{D}}$

Come faccio a trovare l'inversa $\bar{D}(\bar{E})$? Con la trasformazione di Legendre:

$$\tilde{u}_e(\bar{E}) = -u_e(\bar{D}(\bar{E})) + \bar{D}\cdot\bar{E}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_e(\bar{E})}{\partial \bar{E}} = -\left.\frac{\partial u_e}{\partial \bar{D}}\right|_{\bar{D}=\bar{D}(\bar{E})} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{E}}\cdot\bar{E} + \bar{D} = \bar{D}.$$

(Vedere Landau Vol. 8 pp. 73-74-75)-
174-175

Mezzi lineari

Se $\bar{H} = \mu^{-1} \bar{B}$

$$\frac{\partial H_i}{\partial B_J} = \mu^{-1}_{iJ}$$

ma $$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{B}} = \frac{\partial}{\partial B} \bar{H}(\bar{B}) = \frac{\partial}{\partial \bar{B}} \frac{\partial U_m(\bar{B})}{\partial \bar{B}}$$ cioè

$$\frac{\partial H_i}{\partial B_J} = \frac{\partial^2 U_m(\bar{B})}{\partial B_i \partial B_J}$$ che è simmetrica

per il teorema di Schwartz $\Rightarrow$

Allora μ^{-1}_{iJ} e μ_{iJ} sono simmetriche

$$\frac{dU_m(\bar{B})}{dt} = \bar{H}(\bar{B}) \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} =$$

$$= [\mu^{-1} \bar{B}] \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right)^T \mu^{-1} \bar{B} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{B}^T}{\partial t} \mu^{-1} B + B^T \mu^{-1} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} B^T \mu^{-1} B$$ ma

allora $$\boxed{u_m(\bar{B}) = \frac{1}{2}\,\bar{H}\cdot\bar{B}}$$

Vale solo con l'ipotesi di linearità

- Analogamente con il campo elettrico: se $\bar{E} = \varepsilon^{-1}\bar{D}$

$\Rightarrow$ ε è simmetrica

$\Rightarrow$ $$\boxed{u_e(\bar{D}) = \frac{1}{2}\,\bar{E}\cdot\bar{D}}$$

- Sviluppo dell'~~energia elettrica~~ per mezzi lineari stazionari $(\bar{E} = -\bar{\nabla}V)$

$$u_e = \frac{1}{2}\bar{E}\cdot\bar{D} = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}V\cdot\bar{D}$$

$$\bar{\nabla}(\phi\bar{v}) = \bar{\nabla}\phi\cdot\bar{v} + \phi\,\bar{\nabla}\cdot\bar{v}$$

$$-\bar{\nabla}\phi\cdot\bar{v} = -\bar{\nabla}(\phi\,\bar{v}) + \phi\,\bar{\nabla}\cdot\bar{v}$$

$$u_e = -\frac{1}{2}\nabla(V\bar{D}) + \frac{1}{2}V\,\bar{\nabla}\cdot\bar{D}$$

$$\mathcal{U}_e = \int_V u_e \, dv =$$

$$= \int_V -\frac{1}{2} \bar{\nabla} (V \bar{D}) \, dv + \int_V \frac{1}{2} V \rho \, dv$$

se $V \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho V \, dv}$$

- Sviluppo dell'energia magnetica per mezzi lineari stazionari $\left(\bar{B} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} \right)$

$$u_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{\nabla} \wedge \bar{A} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \wedge \bar{H} \cdot \bar{A} - \bar{\nabla} \left(\bar{A} \wedge \bar{H} \right) \right]$$

$$\boxed{\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{J} \cdot \bar{A} \, dv}$$