NOTA SULLO SVILUPPO IN FRAZIONE CONTINUA DI UN NUMERO REALE IN (0,1)

Sia x un qualsiasi numero reale in (0, 1); possiamo determinare uno sviluppo in frazione continua dove i coefficienti sono numeri naturali:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \qquad [1]$$

Essendo $x < 1$ si ha $1/x > 1$ e quindi si può determinare la parte intera di $1/x$ che è un naturale fissato.

Quindi:

$$a_1 = \left[\frac{1}{x}\right] \qquad [2]$$

Segue che $\frac{1}{x} - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}$ e

conseguentemente:

$$a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1}\right] \qquad [3]$$

e così via per gli altri coefficienti:

$$a_3 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2} \right] \quad [4]$$

Tali formule possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} a_1(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \\ a_2(x) = \left[\frac{1}{\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]} \right] \\ a_3(x) = \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]} - \left[\frac{1}{\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]} \right]} \right] \\ \dots\dots \end{cases} \quad [5]$$

che possono essere poste in forma ricorsiva come segue:

$$\begin{cases} g_1(x) = 1/x \\ g_i(x) = \frac{1}{g_{i-1}(x) - [g_{i-1}(x)]} \end{cases} \quad [6]$$

associate con la relazione:

$$a_i(x) = [\, g_i(x) \,] \qquad [7]$$

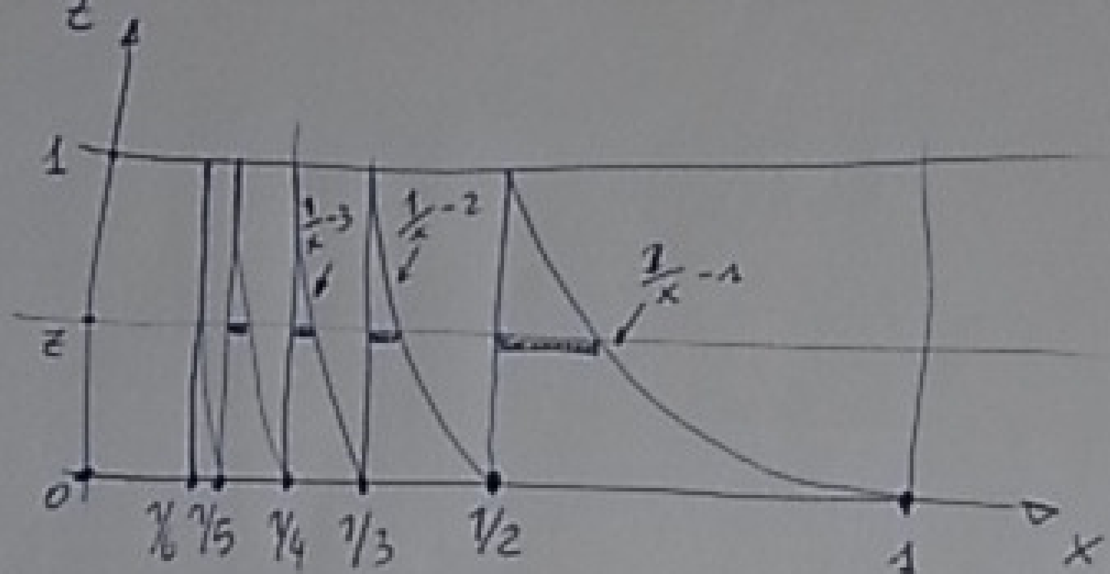
oppure nel modo:

$$\boxed{\begin{cases} h_1(x) = x \\ h_i(x) = \dfrac{1}{h_{i-1}(x)} - \left[\dfrac{1}{h_{i-1}(x)}\right] \end{cases}} \qquad [8]$$

associata con: $\boxed{a_i(x) = \left[\dfrac{1}{h_i(x)}\right]}$ [9]

Usiamo la forma [8][9] per vedere alcune proprietà dello sviluppo in frazione continua. Supponendo di conoscere una densità di probabilità per x costruiamo le densità di probabilità delle funzioni $h_i(x)$. Si tratta quindi di studiare funzioni della variabile aleatoria x. A tal fine consideriamo la trasformazione da $(0,1)$ a $(0,1)$ seguente :

$$x \in (0,1) \Rightarrow z = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \in (0,1) \qquad [10]$$



quando $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = n$

e quindi $z = 1/x - n$; segue :

$$Pr\left\{\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] < z\right\} = \int_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z+n} < x < \frac{1}{n}} f_x(x)\, dx \qquad [11]$$

infatti $\frac{1}{x} - n = z \Rightarrow \frac{1}{x} = n + z \Rightarrow x = \frac{1}{z+n}$

dove $f_x(x)$ è la densità di probabilità della variabile aleatoria x.

Segue subito la funzione di distribuzione per la variabile z:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{z+n}}^{1/n} f_x(x)\, dx \quad [12]$$

Ricordando la regola di derivazione composta:

$$\frac{d}{dz} \int_{a}^{g(z)} f_x(x)\, dx = f_x(g(z))\, g'(z) \quad [13]$$

Allora, applicando questa formula:

$$f_z(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{+\infty} - f_x\left(\frac{1}{z+n}\right) \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+n}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_z(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} f_x\left(\frac{1}{z+n}\right)} \quad [14]$$

[14] rappresenta la relazione tra le densità di probabilità di x e z e quindi abbiamo ottenuto una legge ricorsiva per la densità di probabilità dei coefficienti $h_i(x)$

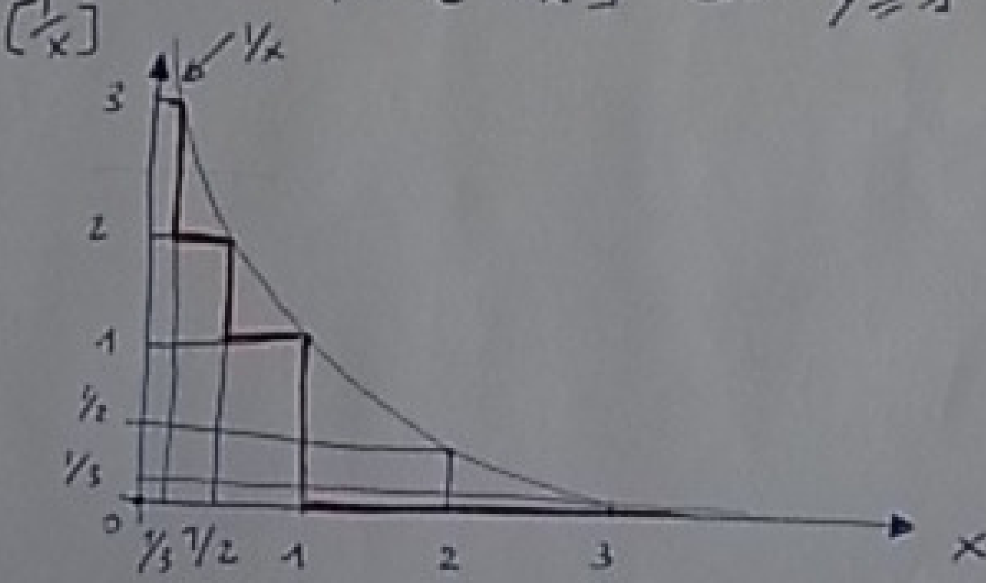
Rappresentate nella [8]:

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(x) &= f_X(x) \\ f_n(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}\, f_{n-1}\left(\frac{1}{x+k}\right) \end{aligned}} \quad [15]$$

$x \in [0,1]$

A questo punto si deve passare alle probabilità relative ai coefficienti $a_i(x)$ ricordando la [9] cioè che $a_i(x) = [1/h_i(x)]$ e che la densità di $h_i(x)$ è $f_i(x)$.

Si è quindi $y = [1/x]$ con $y \geq 1$ intero



Si ha: $[1/x] = n$ se $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$

e quindi $[\frac{1}{x}] < y \Rightarrow x > \frac{1}{[y]+1}$

La funzione di distribuzione di y (7)

è quindi data da

$$F(y) = P_r\{[\tfrac{1}{x}] < y\} = P_r\left\{x > \frac{1}{[y]+1}\right\} =$$

$$= \int_{\frac{1}{[y]+1}}^{1} f_x(x)\,dx \qquad [16]$$

e allora

$$F_{a_n}(y) = \int_{\frac{1}{[y]+1}}^{1} f_n(x)\,dx \qquad [17]$$

e conseguentemente la probabilità che a_n sia un dato intero m è:

$$P_{mn} = P_r\{a_n = m\} = \int_{\frac{1}{m+1}}^{1} f_n(x)\,dx - \int_{\frac{1}{m}}^{1} f_n(x)\,dx =$$

$$= \int_{1/(m+1)}^{1/m} f_n(x)\,dx \qquad [18]$$

allora:

$$\boxed{P_{nm} = P_r(a_n = m) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1/n} f_n(x)\, dx} \quad [19]$$

La [15] e la [19] rappresentano la dinamica delle probabilità per i coefficienti a_i presenti nella frazione continua [1].

Per esempio supponendo $f_X(x)$ uniforme in $(0,1)$ possiamo vedere le probabilità relative ad a_1:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$P_{n1} = P_r(a_1 = n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} 1\, dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$n = 1 \ldots +\infty$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \qquad [20]$$

ovviamente deve essere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \qquad [21]$$

infatti
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

e quindi:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ come deve essere.

Le probabilità relative ad a_2 sono più complicate ($n=2$):

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{x+k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \qquad x \in (0,1) \quad [22]$$

$$P_{m2} = P_r(a_2 = m) = \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{(x+k)^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{x+k} \right]_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\frac{1}{m}+k} + \frac{1}{\frac{1}{m+1}+k} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+\frac{1}{m}-k-\frac{1}{m+1}}{\left(k+\frac{1}{m}\right)\left(k+\frac{1}{m+1}\right)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}{\left(k+\frac{1}{m+1}\right)\left(k+\frac{1}{m}\right)}$$

$$\boxed{P_r(a_2 = m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}{\left(k+\frac{1}{m+1}\right)\left(k+\frac{1}{m}\right)}} \quad [23]$$

e quindi deve essere:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}{\left(k+\frac{1}{m+1}\right)\left(k+\frac{1}{m}\right)} = 1 \qquad [24]$$

infatti:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{N}\left(\dots\right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\frac{1}{1+1}+k}-\frac{1}{\frac{1}{1}+k}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{1+2}+k}-\frac{1}{\frac{1}{2}+k}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{1+3}+k}-\frac{1}{\frac{1}{3}+k}\right)+\dots+\left(\frac{1}{\frac{1}{N+1}+k}-\frac{1}{\frac{1}{N}+k}\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{1+k}+\frac{1}{\frac{1}{N+1}+k}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{N}\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}{\left(k+\frac{1}{m+1}\right)\left(k+\frac{1}{m}\right)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1.$$

Tornando alla generalità riprendiamo la formula [15].

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{x+k}\right) \quad [15]$$

Da tale formula è semplice osservare che esiste un punto fisso $f_\infty(x)$ per la densità di probabilità di $h_n(x)$.

Tale distribuzione limite deve soddisfare:

$$f_\infty(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f_\infty\left(\frac{1}{x+k}\right) \quad [25]$$

poniamo per semplicità

$$f_\infty(x) = \text{cost.} \frac{1}{x+1} \quad \text{e quindi}$$

il secondo membro della [25] diventa:

$$\text{cost.} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \frac{1}{\frac{1}{x+k}+1} =$$

$$= \text{cost} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x+k+(x+k)^2} =$$

$$= \text{cost} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} =$$

$$= \text{cost} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) =$$

$$= \lim_{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) \cdot \text{cost} =$$

$$= \lim_{N} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \dots \frac{1}{x+N} - \frac{1}{x+N+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x+1} \cdot \text{cost}$$

Quindi $f_\infty(x) = \text{cost} \cdot \frac{1}{x+1}$ [26]

La costante si trova imponendo:

$$\int_0^1 f_\infty(x)\, dx = 1$$ essendo una

densità e quindi:

(11)

$$\boxed{f_\infty(x) = \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}} \quad [27]$$

$x \in (0,1)$

Abbiamo quindi trovato la densità di probabilità limite per gli $h_i(x)$ – Seguono le probabilità limite per i coefficienti a_i:

$$P_r\{a_\infty = m\} = \int_{1/m+1}^{1/m} f_\infty(x)\,dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{m+1}}^{1/m} \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\,\log(1+x)\Big|_{1/m+1}^{1/m} =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\,\log\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \log \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}$$

$$\boxed{P_r \left\{ a_\infty = m \right\} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}} \quad [28]$$

Ovviamente deve sempre essere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_r \left\{ a_\infty = m \right\} = 1 \qquad \text{infatti:}$$

$$\sum_{n=1}^{N} P_r \left(a_\infty = m \right) = \frac{1}{\log 2} \left[\log (1+1) - \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{3} \right) \ldots\ldots \log \left(1 + \frac{1}{N} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \right] =$$

$$= (\log 2)^{-1} \left[\log (2) - \log \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \right]$$

quindi:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_r \left(a_\infty = n \right) = 1 .$$

La formula [28] può essere riscritta ricordando che:

$$\log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2}$$

infatti si ottiene:

$$P_r\{a_\infty = n\} = \log_2 \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} =$$

$$= -\log_2 \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = -\log_2\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

quindi:

$$\boxed{P_r\{a_\infty = n\} = -\log_2\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)} \quad [29]$$

Questa è la forma ufficiale con cui si trova questo risultato in letteratura.

Per studiare ulteriormente le statistiche dei coefficienti $a_i(x)$ introduciamo una breve discussione sul teorema ergodico che può essere applicato alla legge di trasformazione [8] -

Consideriamo un generico spazio Ω (per esempio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) e supponiamo che su Ω sia definita una misura $f(x)$ così fatta ($x \in \mathbb{R}^n$):

$$\mu(A \subset \Omega) = \int \cdots \int_{A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n} f(x)\, dx \quad [30]$$

In tale spazio Ω sia poi definita una generica trasformazione $T: \Omega \to \Omega$.

Data una generica trasformazione T si definisce il seguente insieme:

$$T^{-1}(A) = \{ x \in \Omega : T(x) \in A \} \quad [31]$$

In generale $T^{-1}(A)$ può contenere più elementi di Ω anche se A contiene un solo elemento se T non è biunivoca

Si dice che T preserva la misura μ se

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A) \quad \forall A \subset \Omega \quad [32]$$

Inoltre si dice che la trasformazione T è metricamente transitiva (o ergodica) se gli unici insiemi invarianti sono di misura 0 o misura 1; più formalmente

$$T \text{ ergodica} \Leftrightarrow \left[T(A) = A \Rightarrow \mu(A) = \phi \text{ o } \mu(A) = 1 \right] [33]$$

Nelle ipotesi in cui una trasformazione conservi la misura e sia metricamente transitiva vale il cosiddetto Teorema ergodico o teorema di Birkhoff.
Si noti che in generale le ipotesi difficile da dimostrare è la seconda e cioè che T sia metricamente transitiva.

Comunque con le due ipotesi soddisfatte si ha la relazione:

$$\boxed{\int\cdots\int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx = (a.s.) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left[T^k(x_0)\right]} \quad [34]$$

Ciò significa che il valore della media d'insieme di una qualsiasi funzione $g(x)$ su Ω con la misura μ (definita da $f(x)$) è uguale, per quasi tutti gli x_0 (a.s. = almost sure), alla media aritmetica dei valori della funzione g calcolata su un'orbita di x_0 determinata dalla trasformazione T. Più semplicemente si dice che la media d'insieme è per lo più uguale alla media "Temporale".

Tale teorema può essere applicato alla trasformazione da (0 1) in (0, 1) definita

da $T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$

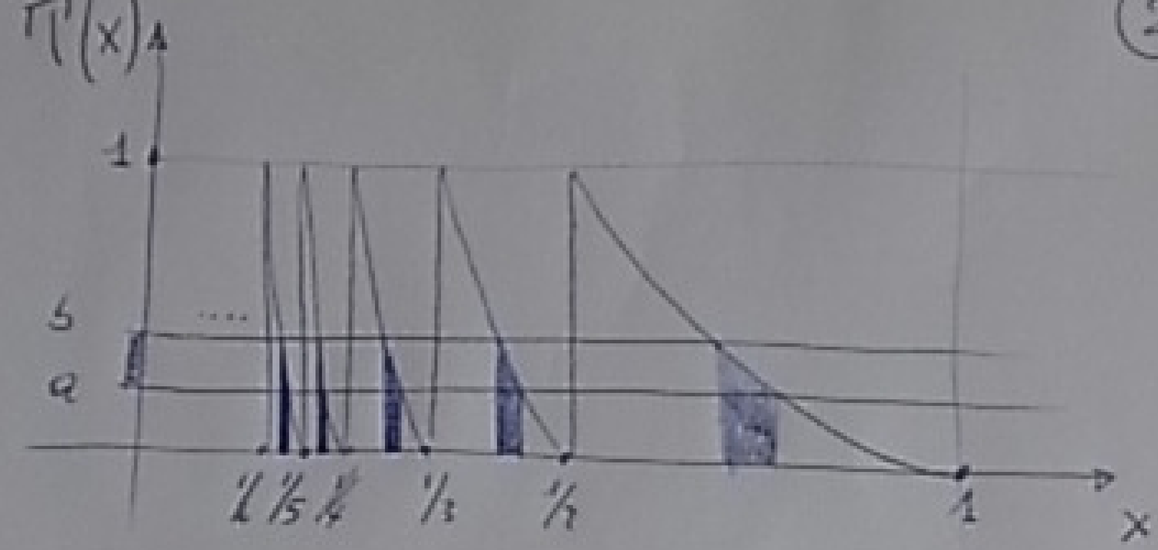
Iniziamo con il dimostrare che $T(x)$ è una trasformazione che conserva la misura quando è definita una misura considerando come funzione $f(x)$ la seguente (equazione [27] : densità limite per gli $h_i(x)$) :

$$f(x) = f_\infty(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$$

Dobbiamo quindi verificare che

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

per ogni A intervallo contenuto in (0,1).
Supponiamo che sia $A = (a,b)$ con $1 < b < a < 0$. L'insieme $T^{-1}(A)$ è dato semplicemente da:



$T^{-1}((a,b))$ è dato da una infinità numerabile di intervalli

$$T^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a} \right) \quad [35]$$

e quindi

$$\mu\left[T^{-1}((a,b))\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n+a}} f(x)\, dx \quad [36]$$

cioè

$$\mu\left[T^{-1}((a,b))\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n+a}} \frac{1}{1+x}\, dx \quad [37]$$

Tale espressione può essere calcolata come (22)

segue

$$\mu\left(T^{-1}\left((a,b)\right)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\log 2}\log(1+x)\Big|_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n+a}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{1+n+a}{n+a}-\log\frac{1+n+b}{n+b}\right] \quad [38]$$

la ridotta discreta

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{1+n+a}{n+a}-\log\frac{1+n+b}{n+b}\right]=$$

$$=\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2+a}{1+a}+\log\frac{3+a}{2+a}+\log\frac{4+a}{3+a}+\dots+\log\frac{1+N+a}{N+a}\right]+$$

$$-\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2+b}{1+b}+\log\frac{3+b}{2+b}+\log\frac{4+b}{3+b}+\dots+\log\frac{1+N+b}{N+b}\right]\Rightarrow$$

e nel limite per $N\to\infty$:

$$\Rightarrow\frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{1}{1+a}-\log\frac{1}{1+b}\right]=\frac{1}{\log 2}\log\frac{1+b}{1+a} \quad [39]$$

quindi

$$\mu\left(T^{-1}((a,b))\right) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{1+b}{1+a} \quad [40]$$

che è proprio $\mu((a,b))$ infatti

$$\mu((a,b)) = \frac{1}{\log 2} \int_a^b \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{1}{\log 2} \log \frac{1+b}{1+a} \quad [41]$$

Quindi T conserva la misura trasformando insiemi in $(0,1)$ (ogni insieme di $(0,1)$ può essere, quando necessario, pensato come unione di più intervalli).
Inoltre si può verificare che T è metricamente transitiva quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema ergodico per il sistema in esame [34] diventa:

$$\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx = (a.s.) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left[T^k(x_0)\right] \quad [42]$$

Prendiamo come funzione g la seguente:

$$g(x) = \ln\left[\frac{1}{x}\right] \qquad [43]$$

Si ha: $$g\left(T^k(x_0)\right) = \ln\left[\frac{1}{T^k(x_0)}\right] =$$

$$= \ln\left[a_{k+1}(x_0)\right] \qquad [44]$$

E quindi [42] si riscrive così:

$$\int_0^1 \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}\,\ln\left[\frac{1}{x}\right] dx =$$

$$= (a.s.) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} \ln\left[a_{k+1}(x_0)\right] \qquad [45]$$

prendendo l'esponenziale di ambo i membri:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_1(x)\cdots a_m(x)} = (a.s.)\, \exp\left\{\int_0^1 \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}\,\ln\left[\frac{1}{x}\right] dx\right\} \qquad [46]$$

la costante a secondo membro si chiama costante di Khintchine (1935).

Tale costante può anche essere scritta in altra versione.

$$K_0 = \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \ln\left[\frac{1}{x}\right] \frac{dx}{1+x} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \ln(n) \frac{1}{1+x}\, dx \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \; \log(1+x) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \; \log \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \; \log \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \; \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right\} \quad [47]$$

Riepilogando:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x_0)\cdots a_n(x_0)} = K_0 \quad (\text{a.s.})} \quad [48]$$

dove

$$K_0 = \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \ln\left[\frac{1}{x}\right] \frac{dx}{1+x} \right\}$$

$$K_0 = \exp\left\{ \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \, \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right\} \quad [49]$$

$$K_0 = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \, \Pr\{a_n = n\} \right\}$$

avendo ricordato la relazione [28].

Quindi la media geometrica e asintoticamente, per lo più uguale ad una costante universale che può essere espressa nei tre modi sopra riportati e che non è legata alle costanti matematiche note.

Altri tipi di medie possono essere ottenuti per mezzo della seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \left[\frac{1}{x}\right]^p \qquad [50]$$

Allora possiamo usare [42] che diventa

$$\int_0^1 \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}\left[\frac{1}{x}\right]^p dx = (2.1) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T^k(x_0)}\right]^p =$$

$$= (21) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\left(a_{k+1}(x_0)\right)^p \qquad [51]$$

Elevando tutto a $1/p$ si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x_0)^p\right]^{1/p} = \left[\int_0^1 \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}\left[\frac{1}{x}\right]^p dx\right]^{1/p} \qquad [52]$$

cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k(x_0)^p\right]^{1/p} = K_p \qquad [53]$$

dove $K_p = \left[\int_0^1 \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}\left[\frac{1}{x}\right]^p dx\right]^{1/p}$ [54]

K_p si può scrivere diversamente:

$$K_p = \left[\frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^p \frac{1}{1+x}\,dx\right]^{1/p} =$$

$$= \left[\frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{1/p} \qquad [55]$$

K_1 non esiste perché la somma corrispondente diverge. Esiste però K_{-1} che rappresenta la media armonica. I valori sono:

$$\begin{cases} K_0 = 2{,}68545200\ldots \\ K_{-1} = 1{,}74540566\ldots \end{cases} \qquad [56]$$

<u>NOTA</u>: Osserviamo che la media di Holder di indice p tende alla media geometrica quando $p \to 0$ infatti:

$$\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right]^{1/p} =$$

$$= \lim_{p\to 0} \exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0} \exp\left[\frac{d}{dp} \ln \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p}\right)\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0} \exp\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p} \ln a_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p}}\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1}\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\ln \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\right] = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \quad [57]$$