

da:

a:

~~L'energia elastica di deformazione~~Conseguenze della positivita' dell'energia sui moduli elastici λ, μ, E, ν

Abbiamo definito $u = \frac{1}{2} T_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}) \epsilon_{ij} =$

$$= \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{kk} \epsilon_{ii} = \mu \text{tr}(\epsilon^2) + \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \epsilon)^2 > 0 \quad \forall \epsilon \neq 0$$

Andiamo a considerare ora ϵ .

1) $\text{tr}(\epsilon) = 0$ in questo caso avro' $u = \mu \text{tr}(\epsilon^2)$ da cui $\boxed{\mu > 0}$
 materiali elastici hanno $\mu > 0$

2) ϵ diagonale $\rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \delta_{ij}$ → NOTO SCARICARE

in questo caso avro' $\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = \epsilon_0^2 \delta_{ij} \delta_{ij} = 3\epsilon_0^2$

$$\epsilon_{ii} \epsilon_{kk} = \epsilon_0 \delta_{ii} \epsilon_0 \delta_{kk} = 9\epsilon_0^2$$

da cui $u = 3\mu \epsilon_0^2 + \frac{\lambda}{2} 9\epsilon_0^2 = 3\epsilon_0^2 \left(\mu + \frac{3}{2} \lambda \right)$ deve essere > 0

dunque

$$\mu > 0$$

$$\mu + \frac{3}{2} \lambda > 0$$

$$\boxed{3\lambda + 2\mu > 0}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{devo sempre} \\ \text{verificare entrambe} \end{array} \right\}$

Facciamo ora la stessa operazione per ricavare delle condizioni sui coefficienti di Young e Poisson

Avevamo detto che

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \rightarrow \frac{3\lambda + 3\mu}{3} = \frac{3\lambda + 2\mu + \mu}{3} > 0$$

E è sempre positivo

$$\boxed{E > 0}$$

Andiamo a vedere con ν

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{1}{2} + \frac{(-\lambda - \mu + \lambda)}{2(\lambda+\mu)} = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)} \stackrel{\mu > 0}{> 0}$$

da cui ricaviamo
come condizione
su ν

$$\boxed{\nu < \frac{1}{2}}$$

ma non solo, andiamo
avanti in un altro modo

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} + 1 - 1 = \frac{\lambda + 2\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} - 1 = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} - 1$$

da cui ricaviamo

un'altra condizione $\boxed{\nu > -1}$

mettendo insieme le 2 condizioni avremo

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

COSA RAPPRESENTA?

Considerando la nota relazione, possiamo dire che come
quando $\nu < 0$ le due costanti stringenti aumentano
le loro relazioni, ma restano indipendenti anche se si
riscrivono quando $\nu > 0$

DEFINIZIONE DEL MODULO DI COMPRESSIBILITÀ k (bulk modulus)

Esiste quando ho una T diagonale,
quanto vale E ?

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Sceveremo ricavare che

$$E = \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(T) I = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} 3\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{3\nu\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} (1+\nu-3\nu) = \boxed{\frac{\sigma}{E} (1-2\nu) = E}$$

riportandolo a λ, μ per comodità

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \sigma \frac{1 - 2 \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}}{\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}} = \sigma \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \sigma \frac{1}{3 \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)} \stackrel{\mu > 0}{> 0}$$

da:

a:

Se determino la $\pi(\epsilon)$ in questo caso (idrostatico) avrà

$$\pi(\epsilon) = \frac{\sigma}{k}$$

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{d\pi' - d\pi}{d\pi}$$

mette in relazione diretta
variaz. volume con la
pressione (solo nel
caso idrostatico)

Avevamo detto che $T_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}}$, per i materiali lineari ed isotropi
avevamo scritto

$$T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$u = \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii} \epsilon_{jj}$$

andiamo a verificare presto
se siamo e vediamo
se è corretto.

VERIFICA con indici diversi in quanto essendo tutti non costanti
come li chiamavo.

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\mu \epsilon_{kh} \epsilon_{hk} + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{kk} \epsilon_{hh} \right) =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial \epsilon_{kh}}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{hk} + \frac{\partial \epsilon_{hk}}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{kh} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{hh} + \frac{\partial \epsilon_{hh}}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{kk} \right) =$$

da vedere applicando
le 2 coppie di indici (k, h)

$$= \mu \underbrace{\delta_{ki} \delta_{hj}}_{\substack{\uparrow \\ \text{indici diversi}}} \epsilon_{kh} + \mu \underbrace{\delta_{ki} \delta_{hj}}_{\substack{\uparrow \\ \text{indici diversi}}} \epsilon_{hk} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\delta_{ki} \delta_{kj}}_{\substack{\uparrow \\ \text{indici diversi}}} \epsilon_{hh} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\delta_{hi} \delta_{hj}}_{\substack{\uparrow \\ \text{indici diversi}}} \epsilon_{kk} =$$

$$= 2\mu \epsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \epsilon_{hh} + \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \epsilon_{kk} = \left[2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad \text{OK}$$

con uguale
indici diversi

Per risolvere un problema di teoria dell'elasticità usiamo le seguenti equazioni

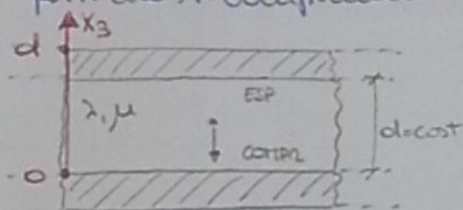
$$\begin{cases} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho a_i \\ T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

Non ci sono come quantità
velocità da ricavare il campo
di spostamenti u

Andiamo a risolvere
un problema completo

[CONDIZIONI STATICHE] N.B.

Abbiamo superficie superiore rigida su cui ho un mezzo elastico e
anche sopra un'altra superficie rigida. Immaginiamo di averlo immerso
in un campo gravitazionale, e nel materiale elastico ho due
punti che ricomprimono e poi che non si spostano. Dovrei ricavare



che le parti che si spostano maggiormente
sono quelle centrali

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{CARICO} \\ \text{DI} \\ \text{SPOSTAMENTO} \end{array} \right\}$$

Come cond. al
contorno ho delle
condizioni di DIRICHLET,
ovvero relative ai bordi

$$\begin{aligned} u_3(0) &= 0 \\ u_3(d) &= 0 \end{aligned}$$

Andiamo ora a risolvere
il sistema di equazioni in u .

Per prima cosa definiamo la matrice ε

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Calcoliamo ora } T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda (\varepsilon_{kk}) \delta_{ij}$$

$$T = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda \partial u_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = T$$

ho così ricavato
le tensioni
degli sposti

da:

a:

Bisogna anche scrivere che, sostituendo la 1^a con le maniglie
con per i indici.

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = 0$$

Tutte derivate in x_1 e $x_2 = 0$

$$T_{22} = T_{13} = 0$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} - p g = 0$$

mi rimane soltanto $\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} - p g = 0$

avendo $\frac{\partial}{\partial x_3} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] - p g = 0$

$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = p g$ le condizioni al contorno sono
più scritte prima

$$\begin{cases} u_3(0) = 0 \\ u_3(d) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \frac{p g}{(\lambda + 2\mu)}$$

andiamo a
integrare successivamente

$$\rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{p g}{(\lambda + 2\mu)} x_3 + C_1$$

$$\rightarrow u_3 = \frac{1}{2} \frac{p g}{(\lambda + 2\mu)} x_3^2 + C_1 x_3 + C_2$$

imponiamo le 2 cond
al contorno e ricaviamo
le costanti

$$u_3(0) = C_2 = 0$$

$$u_3(d) = \frac{1}{2} \frac{p g}{(\lambda + 2\mu)} d^2 + C_1 d + 0 = 0 \quad \text{da cui} \quad C_1 = -\frac{1}{2} \frac{p g}{(\lambda + 2\mu)} d$$



15.6

sostituendo C_1 e C_2 ricavando l'espressione di u_3

$$u_3(x_3) = \frac{1}{2} \frac{p_0}{\lambda + 2\mu} x_3^2 - \frac{1}{2} \frac{p_0}{\lambda + 2\mu} d x_3 =$$

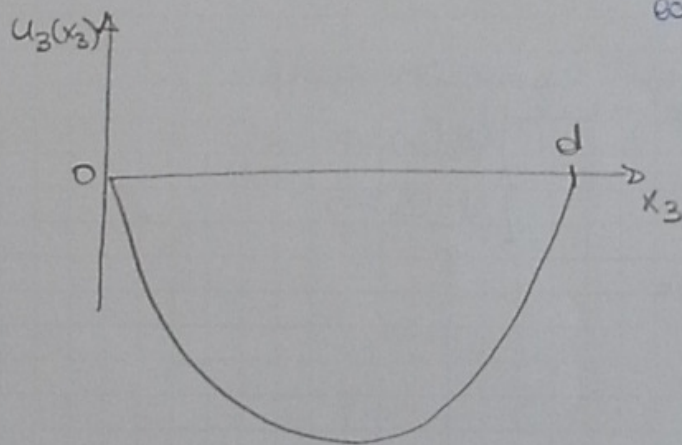
$$= \frac{1}{2} \frac{p_0 x_3}{\lambda + 2\mu} (x_3 - d)$$

in conclusione

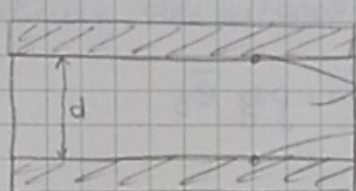
$$u_3(x_3) = - \frac{1}{2} p_0 x_3 \frac{1}{\lambda + 2\mu} (d - x_3) \quad \text{risposta}$$

è nullo per $x_3=0$ e $x_3=d$ e tiene tutto. va bene sia negativo che
va nel verso negativo di x_3 . torna l'andamento

con quello che ci aspettavamo
di trovare



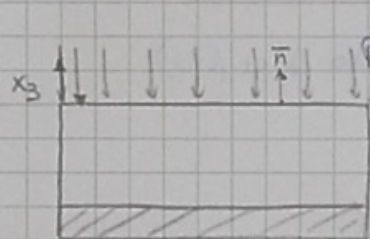
Ripetiamo l'esercizio dell'altra volta



Condiz. al contorno di DIRICHLET

$$u=0 \text{ se } x_3=0$$

Ripetiamo l'esercizio mettere con il piano di sopra sottoposto ad una certa pressione p.



Condiz. al cont. di Neumann

la forza per unità di superficie è pari a P, da cui

$$T \vec{n} = -p \vec{e}_3$$

$$T \vec{e}_3 = -p \vec{e}_3$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u_3(x_3) \end{array} \right\} \rightarrow \text{Poco avere solo sp. univ. verticale}$$

$$\hookrightarrow u_3=0 \text{ se } x_3=0$$

form. dep

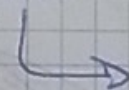
$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$T = 2\mu \epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon) I =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

deve soddisfare l'equaz. del moto



$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + b_1 = \rho g \quad \uparrow 0 \rightarrow \text{STATICO}$$

b = dens. propria di volume,
nel mio caso ho solo gravità

e anche dunque

$$\bar{b} = -\rho g \bar{e}_3$$

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$

è l'unica di tutte
le componenti possibili
che rimane $\neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \rho g = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho g$$

l'andamento di $u_3(x_3)$

Andiamo a risolvere l'eq. diff

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} x_3 + C_1$$

$$\Rightarrow u_3(x_3) = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} x_3^2 + C_1 x_3 + C_2$$

devo imporre
le cond. al
contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \rightarrow u_3 = 0 \\ x_3 = d \rightarrow [T \bar{e}_3 = -p \bar{e}_3] \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$$

e dopo
le eq. cond.
al contorno

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -p$$

QUANDO HO COND. NEUMANN HO UNA
CONDIZIONE SULLA DERIVATA
DELLA SPOLATA

1^a cond

$$u_3 = 0 \text{ a } x_3 = 0$$

$$C_2 = 0$$

2^a cond

$$-p \bar{e}_3 = \rho g d \bar{e}_3 + \dots$$

risultato,
allora
C₁ viene
$$C_1 = -\frac{p}{\lambda + 2\mu} - \frac{\rho g d}{\lambda + 2\mu}$$

La solut. generale sarà dunque

$$u_3(x_3) = \frac{x_3}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{1}{2} \rho g x_3 - P - \rho d g \right]$$

Consideriamo ora un sup. elastico generico, avente fronte
epura. lineari

1° PASSO

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

2° PASSO

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

MEZZO LINEARE

ISOTROPO

Risoliamo qst sistema evolviamo come i fattori (u_1, u_2, u_3)

1° PASSO

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

SI SEMPLIFICANO

$$2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

2° PASSO

$$\left[2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] \text{ E' solo con } \mu$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \lambda \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \right\} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

IDENTICI

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$$

$$\mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right)}_{\text{LAPLACIANO}} + (\lambda + \mu) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{DIVERGENZA}} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \bar{u} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

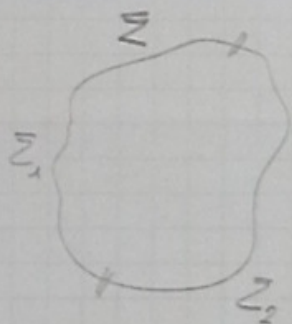
IN VETTORI HO

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE
di
NAVIER
/
CAHÉ

sp. funzionale x
meccanismo.

[Condizioni al contorno]



Consideriamo l'omogenea elasta in 2 parti

• PARTE $Z_1 \rightarrow$ condizioni di DIRICHLET

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}_0(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in Z_1$$

• PARTE $Z_2 \rightarrow$ cond. di NEUMANN

$$\tau \bar{n} = \bar{f}_0(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in Z_2$$

Comunque siamo date le 2 condizioni ho sempre la soluzione unica del problema.

L'equaz. di NAVIER/CAHÉ può anche essere scritta in un altro modo



Avremmo dimostrato che, partendo da operatori differenziali,

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \bar{\nabla}^2 \bar{u} \quad (1)$$

$$\text{rot}(\text{rot } \bar{u}) = \text{grad}(\text{div } \bar{u}) - \text{laplaciano } \bar{u}$$

uniamo per moltiplicare l'eq. di base

1° caso

dalla (1) $\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) = \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) + \bar{\nabla}^2 \bar{u}$, sostituendo ricavo

$$\mu \bar{\nabla}^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) [\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) + \bar{\nabla}^2 \bar{u}] + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

da cui

$$(\lambda + 2\mu) \bar{\nabla}^2 \bar{u} + (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

MODA DI
SCRITTURA
UNICE X
ONDE ELASTICHE

2° caso

dalla (2) $\bar{\nabla}^2 \bar{u} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u})$, sostituendo ricavo

$$\mu [\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u})] + (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + 2\mu) \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \mu \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

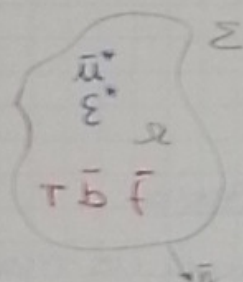
3° FORMA

—————>

Vediamo ora alcuni teoremi che dimostrano l'unicità delle soluzioni Statiche.

SY5 STATICO

① PRINCIPIO DEI LADRI VIRTUALI



Consideriamo un elemento statico

Ho campo spostamenti $\bar{u}^*$ e def $\bar{\epsilon}^*$, un insieme di punti Σ generatore

$\{\bar{u}^*, \bar{\epsilon}^*\}$ è congruente se è vera

la relazione $\bar{\epsilon}_{ij}^* = \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2}$

Consideriamo lo stato eqs, e avrò un tensore degli spz, la densità di volume e forze misef f

$\{T, b, f\}$ si dicono equilibrate se $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$ in Ω (volume) e $T_{ij} n_j = f_i$ in Σ (superficie)

Consideriamo anzitutto le relazioni soddisfatte.

↳ Esiste una relazione tra i 2 sistemi di quantità anche se essi sono indipendenti? (no alla costituzione)

↓
[CI SONO] → qual'è?

↳ Vrb che $\{T, b, f\}$ è equilibrato, è vera $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$. Moltiplico una tale relazione per $\bar{u}_i^*$ (consorzio)

$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \bar{u}_i^* + b_i \bar{u}_i^* = 0$ integrando su tutto il volume

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \bar{u}_i^* + b_i \bar{u}_i^* \right] dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \bar{u}_i^* - T_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \quad \text{PARTE DI UNA DER DI PRODOTTO}$$

$$\int_V \left[\frac{\partial (T_{ij} u_i^*)}{\partial x_j} - T_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + b_i u_i^* \right] dV =$$

dividendo in 3 integrali e applicando il 1° teo della divergenza

$$\int_V \underbrace{T_{ij} u_i^* n_j}_{f_i} dS + \int_V T_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} dV + \int_V b_i u_i^* dV$$

$$T_{ij} (\varepsilon_{ij}^* + \Omega_{ij}^*) = T_{ij} \varepsilon_{ij}^*$$

LOE ANISOMETRICO

moltiplicando per uno simmetrico otteniamo 0

da cui ho ricavato

$$\int_V f_i u_i^* dS - \int_V T_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV + \int_V b_i u_i^* dV = 0$$

PRINCIPIO
LAVORI
VIRTUALI

È una relazione fra termini $\{T, b, f\}$ equilibrati e $\{u, \varepsilon\}$ compatibili che non fra loro completamente indipendenti, dunque una loro non può stare. È SEMPRE VERA

Ho svariate applicazioni, noi ne vediamo 2

1) CALCOLO DELL'ENERGIA TOTALE DI UN CORPO (TEO DI CLAPEYRON, 1833)

lavoro virtuale

fuori avevamo visto che potevamo calcolare

$$E_{tot} = \int_V \frac{1}{2} T_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

però calcolarlo con PLV senza bisogno di conoscere T e ε .

$$\int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV$$

nel PLV facciamo l'ipotesi che T ed ε sono variabili indipendenti ma correlati dalla equat. costitutiva e dunque con variabili i 2 termini come quelli reali

$$\text{GA COST. } T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

→

$$\int_{\Omega} T_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\omega = \int_{\Sigma} f_i u_i \, ds + \int_{\Omega} b_i u_i \, d\omega \quad \text{dove } u_i \text{ moltiplica } \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} f_i u_i \, ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_i u_i \, d\omega}$$

$$\boxed{2} \quad \underline{\text{Nota}} \quad \{u^*, \varepsilon^*\} \text{ CONGR} + \{T, b, f\} \text{ EQUIL} \Rightarrow \text{PLV}$$

$$\{u^*, \varepsilon^*\} \text{ CONGR} + \text{PLV} \Rightarrow \{T, b, f\} \text{ EQUIL}$$

$$\{T, b, f\} \text{ EQUIL} + \text{PLV} \Rightarrow \{u^*, \varepsilon^*\} \text{ CONGR}$$

Strutturalmente, le nostre vere e proprie condizioni si verificano in problemi combinatorie

3 Dimostrazione dell'unicità della soluzione per un problema elastico statico (Kirchhoff, 1859)



$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = 0}$$

$$\Sigma_1 \rightarrow \text{con RICHLET } u(x) = \bar{u}(x) \quad \forall x \in \Sigma_1$$

$$\Sigma_2 \rightarrow \text{con NEUMANN } Tn(x) = \bar{T}_0(x) \quad \forall x \in \Sigma_2$$

Supponiamo che abbiamo due soluzioni distinte ¹ e ²

$$\{T^1, \varepsilon^1, u^1\} \text{ e } \{T^2, \varepsilon^2, u^2\} \quad \text{e soddiscano tutte le nostre relazioni}$$

$$\frac{\partial T_{ij}^1}{\partial x_j} + b_i = 0$$

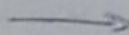
$$u_i^1 = \bar{u}_i \text{ su } \Sigma_1$$

$$T_{ij}^1 n_j = \bar{T}_0 \text{ su } \Sigma_2$$

$$\frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} + b_i = 0$$

$$u_i^2 = \bar{u}_i \text{ su } \Sigma_1$$

$$T_{ij}^2 n_j = \bar{T}_0 \text{ su } \Sigma_2$$



Andiamo a definire varie quantità:

$$\tilde{T} = T^1 - T^2 ; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon^1 - \varepsilon^2 ; \quad \tilde{u} = u^1 - u^2$$

che devono soddisfare varie relazioni

$$1) \quad \boxed{\frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j} = 0} \quad \text{in } \Omega$$

$$2) \quad \boxed{\tilde{u} = 0} \quad \text{su } \bar{\Sigma}_1$$

$$3) \quad \boxed{\tilde{T} \vec{n} = 0} \quad \text{su } \bar{\Sigma}_2$$

POSSO CONCLUDERE CHE

$$\left[\left\{ \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{u} \right\} \text{ soddisfa un problema elastico senza forze di volume, con spostamenti nulli su } \bar{\Sigma}_1 \text{ e con trazione nulla su } \bar{\Sigma}_2 \right]$$

Con queste grandezze andiamo a scrivere il div
→ devo considerare le 2 sup

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\bar{\Sigma}_1} \tilde{f}_i \tilde{u}_i ds + \int_{\bar{\Sigma}_2} \tilde{b}_i \tilde{u}_i d\sigma$$

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\bar{\Sigma}_1} \tilde{f}_i \tilde{u}_i ds + \int_{\bar{\Sigma}_2} \tilde{f}_i \tilde{u}_i ds + \int_{\Omega} \tilde{b}_i \tilde{u}_i d\Omega$$

avevamo detto che vale per intero con $\tilde{f}$ volume $\tilde{b}$ nullo e spostamenti nulli su $\bar{\Sigma}_1$ ($\tilde{u}=0$) e trazione nulla su $\bar{\Sigma}_2$ ($\tilde{f}=0$). Mi rimane

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{T}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} d\Omega = 0 \Rightarrow E_{\text{tot}} \left\{ \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{u} \right\} = 0$$

Ma avevamo detto che per spostamenti non nulli l'energia è sempre positiva.

$$\text{Ho che } E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega = 0 \text{ se } \tilde{\varepsilon} = 0$$

16.10

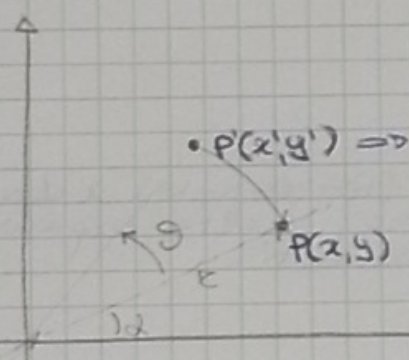
RECAPITULO

ma se $\boxed{\tilde{E} = 0} \rightarrow \boxed{\tilde{T} = 0} \rightarrow \boxed{\tilde{u} = 0}$ dunque le
 più E uniche

FISICA DEI MATERIALI E DEI DISPOSITIVI

TORSIONE DI UN CILINDRO A BASE CIRCOLARE

Studiamo prima a vedere come variano le coordinate di un punto che ruota nello spazio di un angolo θ



$P(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$

$P'(x', y') \Rightarrow \begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases}$

Per trovare che, usando le espressioni delle coordinate dei punti P e P',

$$x' = r \cos(\alpha + \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \cos \theta - \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \sin \theta = \boxed{x \cos \theta - y \sin \theta = x'}$$

$$y' = r \sin(\alpha + \theta) = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) = \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \cos \theta + \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \sin \theta = \boxed{x \sin \theta + y \cos \theta = y'}$$

Ora consideriamo un cilindro. Per torsione intendiamo: la base rimane fissata sul piano x_1, x_2 e fanno ruotare l'altra base di un certo angolo θ (ciascun punto della circonferenza ruota di θ).

Ciascun punto ad una certa altezza ruota ad un certo angolo e la variazione dell'angolo di rotazione varia linearmente con la quota di x_3

$$\theta(x_3) = x_3 \frac{\theta}{H}$$

angolo di torsione in funzione della quota del cilindro

Suppongo che la quota zero del nucleo punto non cambi applicando la torsione (vero)

Un generico punto anche da (x_1, x_2, x_3) a (x'_1, x'_2, x'_3) dove

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \chi_3 \frac{\Theta}{H} - x_2 \sin \chi_3 \frac{\Theta}{H} \\ x'_2 = x_1 \sin \chi_3 \frac{\Theta}{H} + x_2 \cos \chi_3 \frac{\Theta}{H} \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

Sto ragionando per piccole deformazioni (tes distorte) e dunque tutti e cinque li farò sviluppare all'ordine 1; molte approssimerò in termini di variazioni, dunque di spostamenti.

con $\chi \approx 1$ } per χ piccoli
 in $\chi \approx \chi$

$$u_1 = x'_1 - x_1 = x_1 \cos \chi_3 \frac{\Theta}{H} - x_2 \sin \chi_3 \frac{\Theta}{H} - x_1 \approx$$

$$\approx \boxed{-x_2 \chi_3 \frac{\Theta}{H} = u_1}$$

$$u_2 = x'_2 - x_2 = x_1 \sin \chi_3 \frac{\Theta}{H} + x_2 \cos \chi_3 \frac{\Theta}{H} - x_2 \approx$$

$$\approx \boxed{x_1 \chi_3 \frac{\Theta}{H} = u_2}$$

$$\boxed{u_3 = 0}$$

- Se la base non fosse stata circolare, potrei avere una variabile di quota del singolo punto quando appiccico le triviere, seguendo le cosiddette funzioni di torsione ϕ

Calcoliamo ora il tensore delle deformazioni

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \frac{\Theta}{H} \\ 0 & 0 & x_1 \frac{\Theta}{H} \\ -x_2 \frac{\Theta}{H} & x_1 \frac{\Theta}{H} & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare
 il tensore degli sforzi



$$T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} =$$

$$= 2\mu \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu x_2 \frac{\theta}{H} \\ 0 & 0 & \mu x_1 \frac{\theta}{H} \\ -\mu x_2 \frac{\theta}{H} & \mu x_1 \frac{\theta}{H} & 0 \end{bmatrix}$$

Andiamo a controllare che veramente rispettate le equazioni:

$$\left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0 \right. \quad (\text{no + divergenza + statica non ipoten})$$

ferma la derivata che
non della θ non
 $\varepsilon_{13} = -x_2 \frac{\theta}{H} \quad \varepsilon_{23} = x_1 \frac{\theta}{H}$

$$\left\{ \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0 \rightarrow OK \quad (\text{non dipende da } x_3) \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = 0 \rightarrow OK \quad (\text{non dipende da } x_3) \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0 \rightarrow OK \quad (\text{non dep. da } x_1 \text{ e } x_2) \right.$$

Andiamo a vedere se si soddisfa le condizioni al contorno

SULLA S.P. LATERALE

$$\vec{n} = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

devo verificare che
 $f = Tn = 0$

$$f = Tn = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu x_2 \frac{\theta}{H} \\ 0 & 0 & \mu x_1 \frac{\theta}{H} \\ -\mu x_2 \frac{\theta}{H} & \mu x_1 \frac{\theta}{H} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{OK non lo
spira come
vettore
all'infinito}$$

• SOHA BASE SUPERIORE

$$\bar{n} = \bar{e}_3 \quad \text{dato}$$

$$\bar{f} = T \bar{n} = \begin{bmatrix} & & \\ & T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu x_2 \frac{\Theta}{H} \\ \mu x_1 \frac{\Theta}{H} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\mu x_2 \frac{\Theta}{H} \bar{e}_1 + \mu x_1 \frac{\Theta}{H} \bar{e}_2 = \bar{f} \right]$$

Ho ottenuto una densità di forze di tipo tangenziale, che va bene perché generano il momento che porta a torzione la barretta

Calcoliamo il momento rispetto al polo O_P

$$\bar{T}_P = \int_{\Sigma} \bar{r} \wedge \bar{f} \, ds = \int_{\Sigma} (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) \wedge \mu \frac{\Theta}{H} (-x_2 \bar{e}_1 + x_1 \bar{e}_2) \, ds =$$

$$= \mu \frac{\Theta}{H} \int_{\Sigma} \overbrace{(x_1^2 \bar{e}_3 + x_2^2 \bar{e}_3)}^{r^2 \text{ (distanza al quadrato dal centro)}} \, ds = \mu \frac{\Theta}{H} \int_{\Sigma} r^2 \, ds \, \bar{e}_3$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \quad -\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_1$

Converto in coordinate polari, dunque avrò

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \mu \frac{\Theta}{H} r^2 \, d\alpha \, dr = \mu \frac{\Theta}{H} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R r^2 \, dr$$

Si può anche cambiare le variabili, e devo moltiplicare per lo JACOBIANO, ovvero il det. della matrice di tutte le derivate

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & r \sin \alpha \\ -r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r^2 \Rightarrow \mu \frac{\Theta}{H} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R r^2 \, dr$$

da cui

$$\vec{\tau}_P = \mu \frac{\Theta}{H} 2\pi \frac{R^4}{4} \vec{e}_3 = \mu \frac{\Theta}{H} \pi \frac{R^4}{2} \vec{e}_3$$

il modulo sarà

$$\tau_P = \mu \frac{\Theta}{H} \pi \frac{R^4}{2}$$

$$\tau_P = D \frac{\Theta}{H}$$

$D =$ rigidità torsionale di una barra

$\hookrightarrow$ legame tra momento applicato e angolo di torsione ottenuto.

ultima cosa da calcolare è l'ENERGIA TOTALE

derivata di energia

$$U = \frac{1}{2} T_{ij} \epsilon_{ij}$$

$\downarrow$ scrivendo solo quelli $\neq$ da zero otterremo

$$= \frac{1}{2} (T_{13} \epsilon_{13} + T_{31} \epsilon_{13} + T_{23} \epsilon_{23} + T_{32} \epsilon_{32}) =$$

$$= T_{13} \epsilon_{13} + T_{23} \epsilon_{23} = \frac{\mu}{2} x_2^2 \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 + \frac{\mu}{2} x_1^2 \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 =$$

$$= \frac{\mu}{2} (x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 \text{ dunque}$$

$$U = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 r^2$$

Integriamo ora su tutto il volume per ricavare l'energia totale.

$$E_{\text{tot}} = \int_V U dV = \int_V \frac{\mu}{2} \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 r^2 dV$$

poniamo
in

coordinate polari



$$= \int_0^H dx_3 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{\mu}{2} \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 z^2 \cdot z dz = H 2\pi \frac{\mu}{2} \left(\frac{\Theta}{H} \right)^2 \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\mu}{H} \pi \Theta^2 R^4$$

introducendo la rigidezza torsionale

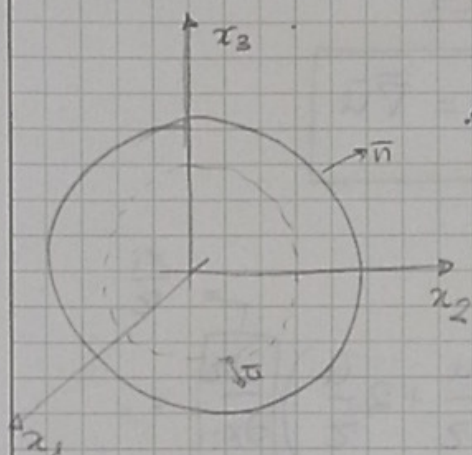
$$D = \mu \frac{1}{2} \pi R^4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{D}{H} \Theta^2 \quad \text{ma} \quad \frac{D\Theta}{H} = \tau_p, \text{ dunque}$$

$$\boxed{E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \tau_p \Theta}$$

formulando
analogo
a $u = \frac{1}{2} \tau \epsilon$

Studio dell'equazione dell'elasticità per la deformazione radiale di una sfera



$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \bar{b} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

Consideriamo una deformazione radiale
le avremo in un principio perché
l'angolo diminuisce se raggio. È
compreso una deformazione radiale,
lo spostamento solo del raggio

$$\bar{u} = u(r) \bar{n} = u(r) \frac{\bar{x}}{r}$$

Lo spostamento dipende solo dal raggio in modulo

$\frac{\bar{x}}{r}$ dovendo avere un verso unitario. È un vettore
cuiamente
radiale.

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\bar{n} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3$$

devo interpretare
notte che è ciò nell'eq
dell'elasticità e devo ottenere
solo in funzione di $u(r)$ e
in modo scalare.

$$u_i(\bar{x}) = u(r) \frac{x_i}{r}$$

Calcoliamo le derivate

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{x_i}{r} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{x_i}{r} + u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r} \right)$$

la u dipende
da r , r dipende
da x_j

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{x_i}{r} + u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{u}{r^2} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right)$$

Calcoliamone ora la divergenza

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \bar{u} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\boxed{x_k x_k}}{z^2} + \frac{u}{z^2} \left(\underbrace{\delta_{kk}}_{\text{tr(I)=3}} z - \frac{x_k x_k}{z} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{z^2} (3z - z) = \boxed{\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{u}{z} = \bar{\nabla} \bar{u}}\end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \bar{u})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\nabla} \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{u}{z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{u}{z} \right) \frac{\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_i}}}{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{u}{z} \right) \frac{x_i}{z} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u}{z} - 2 \frac{u}{z^2} \right) \frac{x_i}{z} = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \frac{u}{z^2} = \nabla^2 u}\end{aligned}$$

Ei manca da calcolare $\nabla^2 u_i$

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_i &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{-- CALCOLO PRIMA} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{x_i x_j}{z^2} + \frac{u}{z} \delta_{ij} - \frac{u}{z^3} x_i x_j \right] \quad \text{-- U CONSIDERO COME COMPONENTI DI 1 PRODOTTO} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{x_i x_j}{z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{z} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{z^3} x_i x_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{x_i x_j}{z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{1}{z} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{z^3} x_i x_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{z^3} x_i x_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{z^3} x_i x_j \right) \quad \text{-- SONO UGUALI E SI CANCELLANO} \rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i x_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} (x_j) + \frac{\partial x_j}{\partial x_j} (x_i) =$$

$$= \delta_{ij} x_j + \boxed{\delta_{jj}} x_i \xrightarrow{te(I)=3} = x_i + 3x_i = 4x_i$$

sostituendo e
ottenendo

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{z^2} \right) \left(\frac{x_j x_i x_j}{z} \right) + 4x_i \frac{1}{z^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{z} \right) \left(\frac{x_i}{z} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{z^3} \right) \left(\frac{x_j x_i x_j}{z} \right) + 4x_i \frac{u}{z^3} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{1}{z^2} x_i z + \frac{\partial u}{\partial z} x_i z \left(\frac{-2z}{z^4} \right) + \frac{4x_i}{z^2} \frac{\partial u}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot z - u}{z^2} \cdot \frac{x_i}{z} - \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot z^3 - u 3z^2}{z^6} \cdot z x_i + 4x_i \frac{u}{z^3}$$

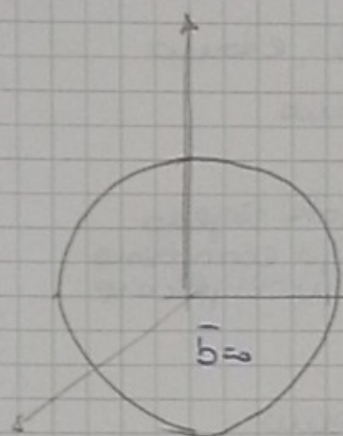
dunque, ricapitolando

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{x_i}{z} \right) - \frac{2}{z^2} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{x_i}{z} \right) + \frac{4}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{x_i}{z} \right) +$$

$$+ \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{x_i}{z} \right) - \frac{u}{z^2} \left(\frac{x_i}{z} \right) - \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{x_i}{z} \right) -$$

$$+ 3 \frac{u}{z^2} \left(\frac{x_i}{z} \right) - 4 \frac{u}{z^2} \left(\frac{x_i}{z} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \frac{u}{z^2} \right) \left(\frac{x_i}{z} \right) = \nabla^2 u_i$$



Stiamo considerando una deformazione radiale in simmetria sferica

hanno avuto a calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{u}{r^2} \right) \frac{x_i}{r}$$

$$\nabla^2 u_i = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{u}{r^2} \right) \frac{x_i}{r}$$

L'eq. dell'elasticità in componenti diventa quindi

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{u}{r^2} \right) \frac{x_i}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

l'eq. che dice $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u \frac{x_i}{r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{x_i}{r} \right)$ e dunque abbiamo

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{u}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{1}{(\lambda + 2\mu)}$$

DEVO ANDARE A RISOLVERLA A OTTENERE u

$u = u(r, t)$, è dunque che ~~de~~ derivate parziali.

Voglio tenere conto sia di r che di t , ma posso considerare la dipendenza dal tempo solo in termini di oscillazione sinusoidale costante ~~(permanente)~~ (permanente), dunque posso rappresentare u come

$$u(r, t) = A(r) \cos(\omega t) + B(r) \sin(\omega t)$$

↑ ogni funzione di questo tipo può essere scritta come

$$u(r, t) = \text{Re} \left\{ \phi(r) e^{-i\omega t} \right\}$$

non complesso $\phi = \phi_R + i\phi_I$

denso da $u(r, t) = \text{Re} \left\{ (\phi_R + i\phi_I) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \right\} = \rightarrow$

$$= \varphi_R \cos \omega t + \varphi_I \sin \omega t$$

↓

dove $\varphi_R = A$ $\varphi_I = B$, e torniamo
a quel buio oscuro primo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \varphi(z) e^{-i\omega t} \right\}$$

facendo la derivata rispetto
al tempo in campo complesso
significa moltiplicare
per $(-i\omega)$

Generalizziamo la φ nell'equazione ~~precedente~~ ^{complessa} e avremo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2 \frac{\varphi}{z^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} (-i\omega)^2 \varphi$$

Risolviamo questa E
dei
TORNANO AD
 $u(z,t)$

Non valso matematicamente,
andiamo a considerare queste
possibilità forme di φ (e che valgono, la da' è prof)

$$\varphi = \frac{d}{dz} \left(e^{ikz} z^\alpha \right) \quad \text{dove } k \text{ ed } \alpha \text{ li ricavo}$$

sostituendo nell'equazione

Lo si tiene

$\varphi, \varphi', \varphi''$

$$\varphi = ik e^{ikz} z^\alpha + e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = ik \left(e^{ikz} z^\alpha \right) + ik e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1} +$$

$$+ ik e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1} + e^{ikz} \alpha (\alpha-1) z^{\alpha-2} =$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -k^2 e^{ikz} z^\alpha + 2ik e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1} + e^{ikz} \alpha (\alpha-1) z^{\alpha-2}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = ik(-k^2) e^{ikz} z^\alpha + ((-k^2) e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1}) +$$

$$+ 2ik(ik) e^{ikz} \alpha z^{\alpha-1} + 2ik e^{ikz} \alpha (\alpha-1) z^{\alpha-2} +$$

$$+ ik e^{ikz} \alpha (\alpha-1) z^{\alpha-2} + e^{ikz} \alpha (\alpha-1)(\alpha-2) z^{\alpha-3} =$$

$$= -ik^3 e^{ikz} z^d - 3k^2 e^{ikz} d z^{d-1} + 3ik e^{ikz} d(d-1) z^{d-2} + d(d-1)(d-2) e^{ikz} z^{d-3}$$

Andiamo ora a sottrarre tutto nell'equazione complessiva

$$\begin{aligned} & -ik^3 e^{ikz} z^d - 3k^2 e^{ikz} d z^{d-1} + 3ik e^{ikz} d(d-1) z^{d-2} + \\ & + d(d-1)(d-2) e^{ikz} z^{d-3} - \frac{2}{z} k^2 e^{ikz} z^d + \\ & - \frac{4}{z} ik e^{ikz} d z^{d-1} + \frac{2}{z} e^{ikz} d(d-1) z^{d-2} + \\ & + \frac{2}{z^2} ik e^{ikz} z^d + \frac{2}{z^2} e^{ikz} d z^{d-1} = \end{aligned}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \Rightarrow \frac{-\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} (ik e^{ikz} z^d + e^{ikz} d z^{d-1})$$

Scriviamo separatamente quelli con $z^d, z^{d-1}, z^{d-2}, z^{d-3}$

$$\textcircled{z^d}: -ik^3 = -\beta^2 ik \rightarrow k^2 = \beta^2 \rightarrow \boxed{k = \pm \beta}$$

Se coeff. delle
potenze di
1° e 2° membro
debbono essere
uguali fra loro
per confronto
delle potenze

$$\textcircled{z^{d-1}}: -3k^2 d - 2k^2 d = -\beta^2 d$$

$$\text{ma } k^2 = \beta^2$$

$$-2k^2 d - 2k^2 d = 0 \quad Z = \text{soluzione} = 0 \Rightarrow \boxed{d = -1} \quad \begin{matrix} k \omega \neq 0 \\ \text{funzione} \\ \text{che si annulla} \end{matrix}$$

$$\textcircled{z^{d-2}}: 3ik d(d-1) + 4ik d + 2ik = 0$$

$$3d^2 - 3d + 4d - 2 + 2 = 0 \quad 3d^2 + d - 2 = 0$$

Risolendolo ricaviamo

$$\boxed{\alpha = -1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

$$\textcircled{z^{\alpha-3}}: +2\alpha(\alpha-1) + \alpha(\alpha+1)(\alpha-2) - 2\alpha = 0$$

$$-2\cancel{\alpha^2} + 2\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \cancel{\alpha} + \alpha^2 - 2 - 2\cancel{\alpha} + 2\cancel{\alpha} = 0$$

$$\text{da cui } \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\boxed{\alpha = -1} \quad \boxed{\alpha = 2}$$

Devo andare a considerare come soluzioni quelle sempre vere, dunque

$$\boxed{k = \pm \beta} \quad \boxed{\alpha = -1}$$

CASO DINAMICO
 $\omega \neq 0$

Nel caso statico invece

$$\boxed{k = 0} \quad \begin{matrix} \boxed{\alpha = -1} \\ \boxed{\alpha = 2} \end{matrix}$$

CASO STATICO

 $\omega = 0$

Avremo sostituito le relazioni inverse

$$\varphi = \frac{d}{dz} \left(e^{ikz} \frac{1}{z} \right)$$

andiamo a particolareggiare nel caso STATICO e DINAMICO con le soluzioni trovate

CASO DINAMICO

$$\varphi = A \frac{d}{dz} \left(e^{i\beta z} \frac{1}{z} \right) + B \frac{d}{dz} \left(e^{-i\beta z} \frac{1}{z} \right)$$

cos

dove

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

$$\left\{ \varphi_0 = C \frac{d}{dz} \left(\cos \beta z \frac{1}{z} \right) + D \frac{d}{dz} \left(\sin \beta z \frac{1}{z} \right) \right\}$$

SOLUZIONE
SINGOLARE NEW ORIGINISOLUZIONE FINITA
NEW ORIGINI

CASO STATICO

$$\varphi = u = A \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2} \right) + B \frac{d}{dz} (z^2) =$$

$$\left\{ \varphi_s = C \frac{1}{z^2} + D z^2 \right\}$$

è la legge ~~di deformazione~~
che legge esperimentale
per deformazione radiale
pura

Dallo studio consideriamo delle applicazioni
di piante navate

1° PROBLEMA (dinamico)

Ho una piastra piena
che allungandosi ha
raggio R . Se la
comprimmo con una
colta pneumatica
idrostatica diminuisce
il raggio. Pensando di
topologia ~~non~~ istantanea
mentre del fluido è anelastico
di dissipazione, quali sono le frequenze di risonanza?



- Non c'è una sola frequenza ma ho uno spettro
- Le frequenze non sono proporzionali a quelle fondamentali

Per dire che la rigola portatile ha libere di muoversi, devo
imporre che le parti di superficie abbiano densità nulla

$$\text{Causa } \varphi \rightarrow u \rightarrow \varepsilon \rightarrow T$$

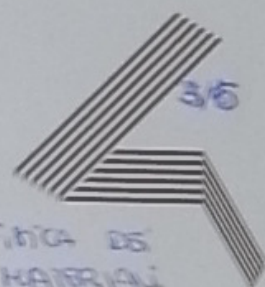
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{dove } u_i = u \frac{x_i}{z} = \varphi \frac{x_i}{z}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi \frac{x_i}{z} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \frac{x_j}{z} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i + \cancel{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i x_j + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i x_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i x_j \right]$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\psi}{2} \right) x_i x_j + \frac{\psi}{2} \delta_{ij} = \varepsilon_{ij}}$$



HABITAT Legno

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edölo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Brione (Brescia)

19.1

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varphi}{z} \right) \frac{x_j x_i}{z} + \frac{\varphi}{z} \delta_{ij} \quad \Leftarrow$$

$$\varphi = A \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos \beta z}{z} \right) + B \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin \beta z}{z} \right) \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{I}{\lambda + 3\mu}}$$

Facciamo l'ipotesi che per $z=R$ $T_n=0$. Poiché la trave è piena non ha singolarità e dunque $\frac{d\varphi}{dz}$ (compie appunto il ruolo di $\frac{d\varphi}{dz}$) è continuo.

$$\varphi = B \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin \beta z}{z} \right) = \frac{\beta \cos \beta z - \sin \beta z}{z^2}$$

$$T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{kk} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) \frac{x_k x_k}{z} + \frac{\varphi}{z} \delta_{kk} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) z + 3 \frac{\varphi}{z}$$

$$\rightarrow 2\mu \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) \frac{x_i x_j}{z} + 2\mu \frac{\varphi}{z} \delta_{ij} + \lambda \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) z + 3 \frac{\varphi}{z} \right] \delta_{ij}$$

abbiamo avere che $T_n=0 \rightarrow T_{ij} n_j = 0$

da cui

$$\rightarrow T_{ij} \frac{x_j}{z} = 0$$

$$T_{ij} \frac{x_j}{z} = 2\mu \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) x_i + 2\mu \frac{\varphi}{z} \frac{x_i}{z} + \lambda \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) z + 3 \frac{\varphi}{z} \right] \frac{x_i}{z} = 0$$

annullando + compiendo airo

parti

$$T_{ij} n_j = (2\mu + \lambda) \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{z} \right) x_i + (2\mu + 3\lambda) \frac{\varphi}{z} \frac{x_i}{z}$$

calcolo la derivata

$$\text{ma non che } \frac{\varphi}{z} = \frac{\beta \cos \beta z - \sin \beta z}{z^3}$$

~~la derivata qui~~

19.2

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\psi}{z} \right) = \frac{[\beta \omega \beta z + \beta z (-\beta \mu \beta z) - \beta \omega \beta z] z^3 -$$

$$- (\beta z \omega \beta z - \mu \beta z) z^2}{z^6} =$$

$$= \frac{\beta z^3 \omega \beta z - \beta^2 z^4 \mu \beta z - \beta z^3 \omega \beta z - 3 \beta z^3 \omega \beta z + 3 z^2 \mu \beta z}{z^6} =$$

$$= \frac{(-\beta^2 z^4 + 3 z^2) \mu \beta z - 3 \beta z^3 \omega \beta z}{z^6} \xrightarrow{\text{divide by } z^2} \frac{(3 - \beta^2 z^2) \mu \beta z - 3 \beta z \omega \beta z}{z^4}$$

now we do not have in T_{ij} n_j = 0, simplify for x_i

$$(2\mu + \lambda) \frac{(3 - \beta^2 z^2) \mu \beta z - 3 \beta z \omega \beta z}{z^4} + (2\mu + 3\lambda) \frac{\beta z \omega \beta z - \mu \beta z}{z^4} = 0$$

$$= (2\mu) (3 \mu \beta z - \beta^2 z^2 \mu \beta z - 3 \beta z \omega \beta z + \beta z \omega \beta z - \mu \beta z) +$$

$$+ (\lambda) (3 \mu \beta z - \beta^2 z^2 \mu \beta z - 3 \beta z \omega \beta z + 3 \beta z \omega \beta z - 3 \mu \beta z) = 0$$

$$2\mu (2 \mu \beta z$$

$$2\mu [(3 - \beta^2 z^2) \mu \beta z - 2 \beta z \omega \beta z] + \lambda \beta^2 z^2 \mu \beta z$$



HABITAT Legno

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edoio (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

19.3

Potremmo risolvere in modo molto semplice, la calcolata per $x=R$ e diviso 5 per $\cos \beta z$

$$2\mu(2-\beta^2 R^2) \lg(\beta R) - 4\mu \beta R = \lambda \beta^2 z^2 \lg(\beta R)$$

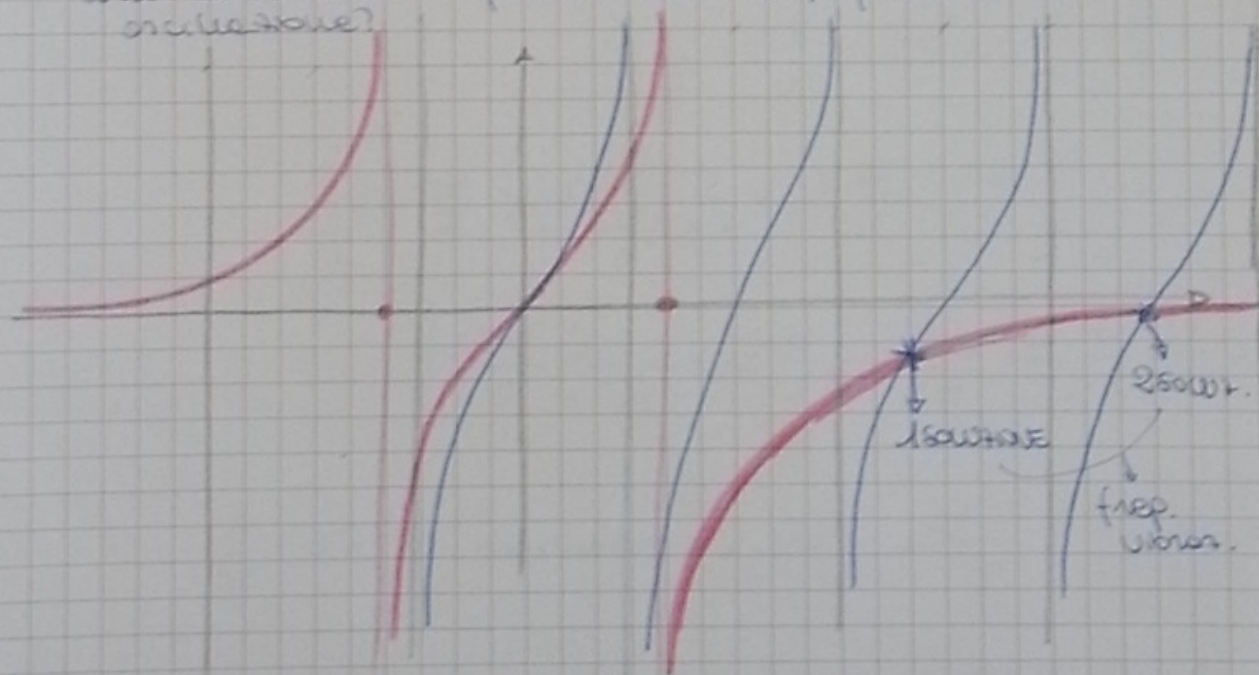
mettiamole le tangenti e otterremo

$$(4\mu - 2\mu \beta^2 R^2 - \lambda \beta^2 R^2) \lg \beta R = 4\mu \beta R$$

$$\lg \beta R = \frac{4\mu \beta R}{4\mu - 2\mu \beta^2 R^2 - \lambda \beta^2 R^2}$$

$$\Rightarrow \lg \beta R = \frac{\beta R}{1 - \frac{2\mu + \lambda}{4\mu} \beta^2 R^2}$$

è una equazione semplice in cui si può trovare la soluzione
sono distribuite le piante con le frequenze di
oscillazione?



la funzione ha 2 ordini
simmetrici.

Le soluzioni vanno equiparate e
sono le (soluzioni = frequenze)

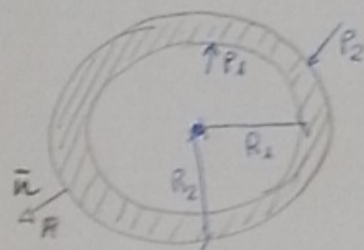
N.B.

19.4

Finora abbiamo una formula dinamica. Andiamo ora ad avere la soluzione statica

$$\hookrightarrow u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$$

Consideriamo una sfera cava con P_{int} e P_{ext} diverse (nel caso



di pressione $A \in B$,

$$u \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow T \xrightarrow[\text{Newton}]{\text{cauchy}} A, B \quad \begin{matrix} \vec{u} = u(r) = \frac{x}{r} \\ \vec{u}_i = u(r) \frac{x_i}{r} \end{matrix}$$

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{x_i}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{x_j}{r} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u}{r} \right) x_i + \frac{u}{r} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u}{r} \right) x_j + \frac{u}{r} \delta_{ij} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \frac{x_i x_j}{r} + 2 \frac{u}{r} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \frac{x_i x_j}{r} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \frac{x_i x_j}{r} + \frac{u}{r} \delta_{ij} \quad \text{sostituendo } u = Ar + \frac{B}{r^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(A + \frac{B}{r^3} \right) \frac{x_i x_j}{r} + \left(A + \frac{B}{r^3} \right) \delta_{ij} = -3B \frac{1}{r^4} \frac{x_i x_j}{r} + \left(A + \frac{B}{r^3} \right) \delta_{ij} =$$



HABITAT Legno^{SpA}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

19.5

$$= \left[\frac{-3B x_i x_j}{z^3} + A \delta_{ij} + \frac{B}{z^3} \delta_{ij} \right] \rightarrow \epsilon_{ij}$$

lo sostituiamo in
T_{ij} e ricaviamo
l'espressione

$$\bar{T}_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{kk} = -3 \frac{x_k x_k}{z^3} B + 3A + \frac{3B}{z^3} = -3 \frac{1}{z^3} B + 3A + \frac{3B}{z^3} =$$

$$= [3A = \epsilon_{kk}]$$

$$\rightarrow = 2\mu \left(-3 \frac{x_i x_j}{z^3} B + A \delta_{ij} + \frac{B}{z^3} \delta_{ij} \right) + 3A \lambda \delta_{ij} = \bar{T}_{ij}$$

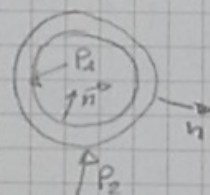
devo ora andare ad imporre le condizioni al contorno p.e.p.

per $z = R_2$

$$T \bar{n} = -p_2 \bar{n}$$

per $z = R_1$

$$T(-\bar{n}) = T_1 \bar{n}$$



$$\text{Calcoliamo } T_{ij} n_j = T_{ij} \frac{x_j}{z} =$$

$$= -6\mu \frac{x_i x_j}{z^5} B \frac{x_j}{z} + 2\mu A \delta_{ij} \frac{x_j}{z} + 2\mu B \frac{1}{z^3} \delta_{ij} \frac{x_j}{z} + 3A \lambda \delta_{ij} \frac{x_j}{z}$$

$$= -6\mu \frac{x_i B}{z^4} + 2\mu A \frac{x_i}{z} + 2\mu \frac{B x_i}{z^4} + 3A \lambda \frac{x_i}{z} =$$

$$= -4\mu \frac{x_i B}{z^4} + (2\mu + 3\lambda) A \frac{x_i}{z} = \left[-4\mu \frac{B}{z^2} + (2\mu + 3\lambda) A \right] \frac{x_i}{z}$$

↳ FORZA X UNITA' DI SUPERFICIE

49.6

$$\begin{aligned} z=R_1 &\rightarrow \begin{cases} -4\mu \frac{B}{R_1^3} + (2\mu+3\lambda)A = -p_1 \\ -4\mu \frac{B}{R_2^3} + (2\mu+3\lambda)A = -p_2 \end{cases} \end{aligned}$$

da qui ottengo
A e B

$$-4\mu \frac{B}{R_1^3} + 4\mu \frac{B}{R_2^3} = p_2 - p_1$$

$$\downarrow \quad +4\mu B \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) = p_2 - p_1$$

$$B = \frac{p_2 - p_1}{4\mu \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)}$$

sostituendo
nella
1°

$$-4\mu \frac{1}{R_1^3} \left(\frac{p_2 - p_1}{4\mu \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)} \right) + (2\mu+3\lambda)A = -p_1$$

$$A = \left[-p_1 + \frac{1}{R_1^3} \left(\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}} \right) \right] \frac{1}{2\mu+3\lambda} =$$

$$= \left[\frac{p_2 - p_1 \frac{R_1^3}{R_2^3}}{\frac{R_1^3}{R_2^3} - 1} \right] \frac{1}{2\mu+3\lambda} \Rightarrow A = \frac{1}{2\mu+3\lambda} \frac{p_2 R_2^3 - p_1 R_1^3}{R_1^3 - R_2^3}$$



HABITAT Legno

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

19.7

ho dunque ottenuto

$$u(r) = \left(\frac{1}{2\mu+3\lambda} \frac{P_2 R_2^3 - P_1 R_1^3}{R_1^3 - R_2^3} \right) r + \frac{P_2 - P_1}{4\mu \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)} \frac{1}{r^2}$$

Se $R_1=0$, ho una pila. La 2ª parte tende a zero e sparisce la singolarità data dall' $1/r^2$ al denominatore, e mi resta

$$u(R_2) = \frac{-P_2}{2\mu+3\lambda}$$

Quel che ho ottenuto è il modulo di compressione k ; le ho messo con pressione idrostatica p dove che

$$\frac{V'-V}{V} = -\frac{P}{k} \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Dopo che ho applicato la pressione la R_2 R_2 interale è solo

è coerente con quello appena trovato!

$$R_2' = R_2 + u(R_2)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \quad V' = \frac{4}{3}\pi R_2'^3$$

$$\rightarrow u(R_2) = \frac{-P_2}{2\mu+3\lambda} \quad \text{da cui}$$

dunque

$$R_2' = R_2 - \frac{P_2}{2\mu+3\lambda}$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi \left(R_2 - \frac{P_2}{2\mu+3\lambda} \right)^3$$

ma $u \ll R_2$, ho trascurato le piccole deformazioni

$$= \frac{4}{3}\pi R_2^3 \left(1 - \frac{P_2}{(2\mu+3\lambda)R_2} \right)^3$$

DE' PICCOLO, E' $\frac{u}{R_2}$; SUIWAPPASSO
RITENGO $(1-3x)$ con $x =$

dunque ottengo

$$\frac{4}{3}\pi R_2^3 \left(1 - \frac{3P_2}{(2\mu+3\lambda)R_2} \right) \approx V'$$

19.8

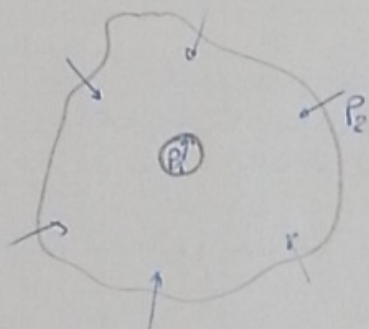
$$\frac{V' - V}{V} = - \frac{3P_2}{(2\mu + 3\lambda) R_1} = -P_2 \frac{1}{\lambda + 2/3\mu}$$

ok con

siamo finiti
alla def. di
 k che avevamo
già trovato

se R_2 è molto grande? $R_2 \rightarrow \infty$

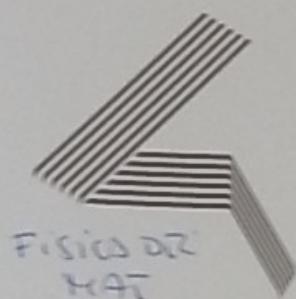
È come avere l'orpo enorme con la molla libera al centro,
una per molecola delle rocce



$$u(r) = \frac{-P_2}{2\mu + 3\lambda} r^2 - \frac{P_2 - P_1}{4\mu} \frac{R_1^3}{r^2}$$

se $P_1 = 0$

$$u(r) = -\frac{P_2}{2\mu + 3\lambda} r^2 - \frac{P_2}{4\mu} \frac{R_1^3}{r^2}$$



HABITAT Legno

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edölo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefon: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

20.1

VERSIONE BI-DIMENSIONALE DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

teoria univari
lineari isotropi

① PLANE STRAIN

② PLANE STRESS

③ ANTI-PLANE SHEAR

4 le varie variabili (ϵ, τ, u) più
funzioni di 2° o
parametri in questi 3 casi
Considero sempre il caso tridimensionale
ho solo due variabili anche qui +

① Plane Strain

Qualche spostamento ha la seguente rappresentazione

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

non ha spostamenti
lungo la direzione x_3 . Considerando
punti appartenenti alla sezione x_1, x_2 di
appartenenza, all'interno del piano
può muoversi arbitrariamente

cosa comporta?

RICORDA (valido x matrici 3x3)

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{E} \text{tr} T \cdot I \quad ; \quad T = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} I \text{tr} \epsilon$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che può essere
rappresentato da
una matrice
2x2

da qui ricaviamo
le T

Lo

20.2

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ T_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} \\ T_{22} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{22} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{cases}$$

poiché si tratta
di matrice
è 2×2 ,
la formula sopra
è l'istesso anche
se prendiamo la
derivata
(ho $I(2 \times 2) \dots$)

$$T = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} I_2 \text{tr} \varepsilon$$

Andiamo a calcolare la formula inversa

$$\text{tr} T = \frac{E}{1+\nu} \text{tr} \varepsilon + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \text{tr} \varepsilon =$$

$\rightarrow \text{tr} I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{N.B.}$

$$= \frac{E}{1+\nu} \text{tr} \varepsilon \left(1 + \frac{2\nu}{1+2\nu} \right) = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \text{tr} \varepsilon = \text{tr} T$$

da cui posso ricavare le ε dalle dep. di T

$$\frac{1+\nu}{E} T = \varepsilon + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} I_2 \text{tr} \varepsilon =$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{1+2\nu} I_2 \text{tr} \varepsilon =$$

$$= \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{1+2\nu} I_2 \frac{(1+\nu)(1+2\nu)}{E} \text{tr} T =$$

$$= \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu(1+\nu)}{E} I_2 \text{tr} T = \varepsilon$$

ho una formula diversa
avendo delle matrici
 2×2 nel caso 2D

NEL CASO 2D PER LE
STRAIN L'ESPRESSIONE
DI T NON CAMBIA
MA CAMBIA QUELLA
DI ε



② Plane Stress

Condizione in cui il tensore degli sforzi applicato a una direzione speciale fine è nullo

$$\vec{T} \vec{n} = 0 \quad \text{con } \vec{n} \equiv \vec{e}_3, \text{ ovvero piano } (x_1, x_2)$$

in matrici e vettori diventa

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} T_{13} = 0 \\ T_{23} = 0 \\ T_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{si ottengono 3 equazioni in } (2 \times 2)$$

Considerando il piano 1 all'ordine 3 ^{le} non ho fine che si trasmettono lungo il ~~più~~ tale piano, lungo gli altri piani (T_{3i}) non ho sforzi trasmessi.

Il punto con la ε avrà 3 componenti:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} T_{11} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} T_{12} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} T_{22} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon = \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{E} \text{tr} T \quad \text{finalmente è uguale} \quad I_2 = I(2 \times 2)$$

facciamo le stesse cose di prima e ricaviamo l'espressione di T

$$\begin{aligned} \text{tr} \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} \text{tr} T - \frac{\nu}{E} \text{tr} T \quad \text{tr} I_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ u.g.} \\ &= \frac{1}{E} \text{tr} T (1 + 2\nu - 2\nu) = \left[\frac{1-\nu}{E} \text{tr} T = \text{tr} \varepsilon \right] \end{aligned}$$

25.4

Da cui otteniamo, ricavando le formule inverse sostituendo
la relazione appena trovata

$$T = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu}{1+\nu} \underbrace{tr T}_{\text{tr T}} I_2 = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} tr \epsilon I_2 =$$

$$\boxed{T = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu}{1-\nu^2} tr \epsilon I_2 = T}$$

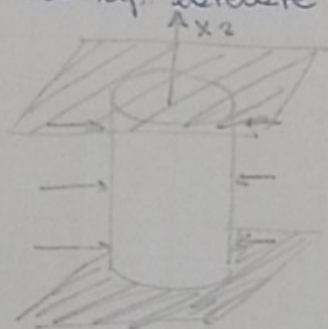
E' cambiata
la forma
dell'equazione
costitutiva

{ CON PLANE STRESS CAMBIA LA FORMA DI T }
{ MA NON CAMBIA QUELLA DI E }

~~~~~~~~~

Per capire meglio:

Prendiamo un cilindro e applichiamo una pressione su di  
la sup. laterale con le teste bloccate



Lo PLANE STRAIN

PLANE STRESS

↳ il corpo riappare verso una  
posizione di equilibrio annullando  
proprio fra piani e lungo i piani

↳



# HABITAT Legno SpA

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 **Edolo** (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 **Braone** (Brescia)

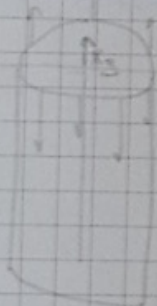
20.5

## ③ ANTI - PLANE SHEAR

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = u_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

ho uno spostamento  
funzione delle 2 dimensioni  
lungo le quali non  
avviene

Per un elemento, ciascun punto può spostarsi lungo  $x_3$  di una  
piccolissima quantità. E' come applicare forze ROTAZIONALI  
TANGENZIALI ALLA SUP. LATERALE



Come prima

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda (\text{tr } \epsilon) \delta_{ij}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

ho come detto  
solo  
spinti tangenziali

Applichiamo ora le equazioni del moto

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho a_i$$



20.6

$b_1 = \rho a_1$  ma sono statico  $\Rightarrow a_1 = 0$ , no pressure

$$b_2 = \rho a_2$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + b_3 = \rho a_3$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u_3 \text{ da cui}$$

$$\boxed{\mu \nabla^2 u_3 + b_3 = \rho a_3} \rightarrow \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE DI D'ALBERT (prop. suono)

Se ho corpo statico,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$  e un corpo

$$\left[ \mu \nabla^2 u_3 + b_3 = 0 \right] \text{ EQ. POISSON}$$

Se non ho forze  $\tau$ ,  $b=0$

$$\left[ \nabla^2 u_3 = 0 \right] \text{ EQ. LAPLACE}$$

Le condizioni al contorno del corpo anti-piano sono come vorremmo?

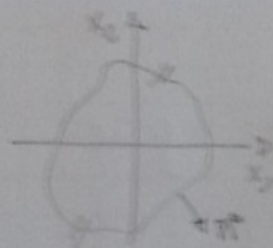
Definiamo un Spazio Campi Potenziale  $\bar{z} = u, \bar{z}_1 \cup \bar{z}_2$

• CONDIZIONI DI DIRICHLET

$$u_3(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \text{ su } \bar{z}_1$$

• CONDIZIONI DI NEUMANN

$$\nabla \bar{u} \cdot \vec{n} = g(x_1, x_2) \text{ su } \bar{z}_2 \quad \sim$$



VISTA DALL'ALTO



# HABITAT Legno<sub>SA</sub>

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

20.7

Che significa la 2<sup>a</sup>?

Avremo detto che

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu n_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu n_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mu \vec{\nabla} u_3 \cdot \vec{n} = \frac{\partial u_3}{\partial n} \quad \text{condizione naturale}$$

ovvero, la cond. al cont. di Neumann esplicita una

$$\mu \frac{\partial u_3}{\partial n} = g(x_1, x_2)$$