Leggi conservative per un sistema interagente con un potenziale ad N corpi arbitrario

Supponiamo di N particelle interagiscano con il più generico potenziale $U = U(\bar{r}_1 \cdots \bar{r}_N)$.
Con N particelle la posizione a meno di rototraslazioni è fissata quando sono note le distanze scalari reciproche (che sono $N(N-1)/2$ senza contare le simmetriche).
Supponiamo allora che $U = U(r_{ij})$ dove $r_{ij} = \| \bar{r}_i - \bar{r}_j \|$. Supponiamo inoltre che il potenziale sia scritto in modo che possono

Comparire sia r_{ij} che r_{ji} senza fissare una convenzione che distrugge la simmetria di r_{ij}

Quindi il sistema evolve sotto l'effetto di $U(r_{ij})$ e di forze esterne $\vec{F}_i^{ext}$ $\forall i = 1..N$. Il passo iniziale è quello di calcolare la forza interna sulla particella i-esima (somme ripetute):

$$\vec{F}_i^{int} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial U}{\partial r_{JK}} \frac{\partial r_{JK}}{\partial \vec{r}_i}$$

Calcolo allora $\frac{\partial r_{JK}}{\partial r_i^{\alpha}}$ dove α indica la componente $\alpha = 1,2,3$ o $\alpha = x, y, z$.

$$\frac{\partial r_{JK}}{\partial r_i^{\alpha}} = \frac{\partial \| \vec{r}_J - \vec{r}_K \|}{\partial r_i^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \sqrt{(\bar{r}_J - \bar{r}_K)\cdot(\bar{r}_J - \bar{r}_K)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} \sqrt{(r_J^\beta - r_K^\beta)(r_J^\beta - r_K^\beta)} =$$

$$= \frac{1}{2\|\bar{r}_J - \bar{r}_K\|} \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} (r_J^\beta - r_K^\beta)^2 =$$

$$= \frac{1}{r_{JK}} (r_J^\beta - r_K^\beta)(\delta_{iJ}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{iK}\delta_{\alpha\beta}) =$$

$$= \frac{1}{r_{JK}} (r_J^\alpha - r_K^\alpha)(\delta_{iJ} - \delta_{iK})$$

ma allora $\boxed{\frac{\partial r_{JK}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\vec{r}_J - \vec{r}_K}{r_{JK}}(\delta_{iJ} - \delta_{iK})}$

quindi:

$$\vec{F}_i^{int} = \frac{\partial U}{\partial r_{JK}} \frac{\bar{r}_J - \bar{r}_K}{r_{JK}} (\delta_{iJ} - \delta_{iK})$$

dove j e k sono sommati

quindi si ottiene

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_k \frac{\partial U}{\partial r_{ik}} \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_k}{r_{ik}} +$$

$$- \sum_j \frac{\partial U}{\partial r_{ji}} \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{r_{ji}} =$$

$$= \sum_k \frac{\partial U}{\partial r_{ik}} \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_k}{r_{ik}} +$$

$$- \sum_k \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \frac{\bar{r}_k - \bar{r}_i}{r_{ki}}$$

ma $r_{ki} = r_{ik}$ quindi

$$\boxed{\vec{F}_{int,i} = \sum_k \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}}\right)\left(\bar{r}_i - \bar{r}_k\right)}$$

1° equazione cardinale

Supponiamo che ogni particella risenta di una forza $\vec{F}_i^{\,est}$ indipendente dal potenziale U (esterna)

massa accelerazione

$$\vec{F}_i^{\,int} + \vec{F}_i^{\,est} = m_i \, \vec{a}_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,int} =$$

$$= \sum_{k,i} \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right) \left[\bar{r}_i - \bar{r}_k \right] =$$

inverto e metto il meno

$$= - \sum_{k,i} \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right) \left[\bar{r}_k - \bar{r}_i \right]$$

cambio nomi

$$= - \sum_{k,i} \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right) \left[\bar{r}_i - \bar{r}_k \right]$$

Ma allora:

$$\sum_i \vec{F}_i^{int} = -\sum_i \vec{F}_i^{int}$$

e quindi $\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0}$

Ne segue:

$$\sum_i \cancelto{0}{\vec{F}_i^{int}} + \sum_i \vec{F}_i^{est} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{tot}^{est} = \sum_k m_k \frac{d^2}{dt^2} \overbrace{\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right)}^{\vec{r}_{CM}}$$

allora $\boxed{\vec{F}_{tot}^{est} = M \vec{a}_{CM}}$

Oppure $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{F}_{tot}^{est} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

2° equazione cardinale

$$\vec{\tau}_1^{\,int} = (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_1^{\,int}$$

$\bar{r}_P$ = posizione del polo

$\bar{\tau}_1^{\,int}$ = momento i-esimo delle forze interne

$\bar{\tau}_1^{\,est}$ = momento i-esimo delle forze esterne

$$\vec{\tau}_1^{\,est} = (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge \vec{F}_1^{\,est}$$

$\bar{L}_1$ = momento angolare i-esimo

$$\bar{L}_1 = (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge m_i \vec{V}_i$$

$\bar{L}$ = momento angolare Totale

$$\bar{L} = \sum_i (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge m \bar{V}_i$$

$$\vec{\tau}_i^{\,int} = (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge \vec{F}_i^{\,int} =$$

$$= (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge \sum_k \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right) (\bar{r}_i - \bar{r}_k) =$$

$$= \sum_k \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right) (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge (\bar{r}_i - \bar{r}_k)$$

$\bar{\tau}^{\,int}$ = momento totale delle forze interne.

$$\bar{\tau}^{\,int} = \sum_i \bar{\tau}_i^{\,int} =$$

$$= \sum_{i,k} \underbrace{\frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial U}{\partial r_{ki}} \right)}_{\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \ \text{sym}} (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge (\bar{r}_i - \bar{r}_k)$$

nullo

$$= \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \left(\bar{R}_i - \bar{R}_k - \bar{R}_p + \bar{R}_k\right) \wedge \left(\bar{r}_i - \bar{r}_k\right) =$$

inverto e metto meno

$$= \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \left(\bar{R}_k - \bar{R}_p\right) \wedge \left(\bar{r}_i - \bar{r}_k\right) =$$

$$= -\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \left(\bar{R}_k - \bar{R}_p\right) \wedge \left(\bar{r}_k - \bar{r}_i\right) =$$

↓ cambio nomi

$$= -\sum_{i,k} \varepsilon_{ki} \left(\bar{R}_i - \bar{R}_p\right) \wedge \left(\bar{R}_i - \bar{R}_k\right) =$$

↓ sym

$$= -\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \left(\bar{R}_i - \bar{R}_p\right) \wedge \left(\bar{R}_i - \bar{R}_k\right) =$$

$$= -\sum_i \bar{\tau}_i^{int} = -\bar{\tau}^{int}$$

quind $\boxed{\bar{\tau}^{int} = 0}$

$$\bar{F}_i^{int} + \bar{F}_i^{est} = m_i \bar{a}_i$$

$$(\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge \bar{F}_i^{int} + (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge \bar{F}_i^{est} =$$

$$= (\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}$$

$$\bar{\tau}_i^{int} + \bar{\tau}_i^{est} = \frac{d}{dt}\left[(\bar{r}_i - \bar{r}_P) \wedge m_i \bar{V}_i\right] +$$

$$- (\bar{V}_i - \bar{V}_P) \wedge m_i \bar{V}_i$$

$$\bar{\tau}_i^{int} + \bar{\tau}_i^{est} = \frac{d\bar{L}_i}{dt} + \bar{V}_P \wedge m_i \bar{V}_i$$

$$\underbrace{\sum_i \bar{\tau}_i^{int}}_{0} + \sum_i \bar{\tau}_i^{est} = \frac{d}{dt}\sum_i \bar{L}_i + \bar{V}_P \wedge \sum_i m_i \bar{V}_i$$

$$\boxed{\bar{\tau}^{est} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{V}_P \wedge \bar{P}}$$

3° equazione dell'energia

$$\bar{F}_1^{int} + \bar{F}_1^{est} = m_1 \bar{a}_1$$

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{F}_1^{int} + \bar{V}_1 \cdot \bar{F}_1^{est} = m_1 \bar{V}_1 \cdot \bar{a}_1$$

$$m_1 \bar{V}_1 \bar{a}_1 = m_1 \bar{V}_1 \cdot \frac{d\bar{V}_1}{dt} =$$

$$= m_1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_1\right) = \frac{dT_1}{dt}$$

T_1 = energia cinetica i-esima =

$$= \frac{1}{2} m_1 \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_1$$

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{F}_1^{int} + \bar{V}_1 \cdot \bar{F}_1^{est} = \frac{dT_1}{dt}$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{cinetica} \\ \text{totale} \end{array} \right\}$$

$$\sum_i \bar{V}_i \bar{F}_i^{int} + \sum_i \bar{V}_i \bar{F}_i^{est} = \frac{dT}{dt}$$

$$\sum_i -\bar{V}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \bar{r}_i} + \sum_i \bar{V}_i \bar{F}_i^{est} = \frac{dT}{dt}$$

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial \bar{r}_i} \frac{d\bar{r}_i}{dt} + \underbrace{\sum_i \bar{V}_i \bar{F}_i^{est}}_{} = \frac{dT}{dt}$$

$$-\frac{dU}{dt} + P_{\text{otenza applicata}} = \frac{dT}{dt}$$

cioè $$\frac{d}{dt}(T+U) = P_{\text{otenza applicata}}$$

Integro da t_A a t_B

dove $A = \{A_i\}$ e $B = \{B_i\}$ sono le configurazioni iniziale e finale.

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{d(T+U)}{dt}\, dt = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{potenza applicata}}\, dt$$

$$T(B) - T(A) + U(B) - U(A) =$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \sum_i \bar{V}_i \cdot \bar{F}_i^{est}\, dt =$$

$$= \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \bar{F}_i^{est} \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt}\, dt =$$

$$= \sum_i \int_{\gamma_i} \bar{F}_i^{est}\, d\bar{r}_i = \underbrace{\sum_i \underbrace{L_i^{A-B}}_{\text{lavoro i-esimo}}}_{\text{lavoro totale delle forze esterne}}$$

$$\Delta T = T(B) - T(A)$$
$$\Delta U = U(B) - U(A)$$

$$\boxed{\Delta T + \Delta U = L^{A-B}}$$

primo principio per il sistema di N particelle