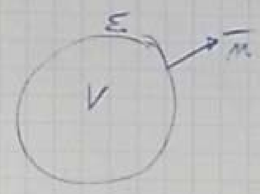
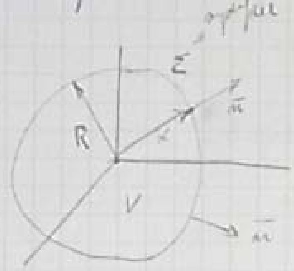
Volume della sfera tramite il teo della divergenza



$$\left.\begin{aligned}&\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{V}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_\Sigma \bar{V}\cdot\bar{m}\,dS\\ &\text{oppure}\\ &\int_V \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int \phi\, m_i\,dS.\end{aligned}\right\}\ \text{Teo div.}$$

Caso della sfera



$\bar{V}$ coincide col vettore posizione $\bar{x}$

$$\bar{V} = \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 1+1+1 = 3$$

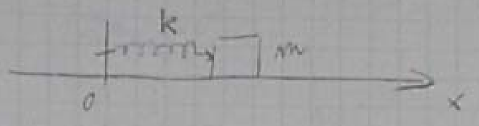
$$\int_V 3\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_\Sigma \bar{V}\cdot\bar{m}\,dS = \int_\Sigma \bar{x}\cdot\bar{m}\,dS =$$

$\bar{x} = R\bar{m}$ sulla superficie.

$$= \int_\Sigma R\cdot\underbrace{\bar{m}\cdot\bar{m}}_{1}\,dS = R\int_\Sigma dS$$

$$\underbrace{3\int_V dx_1\,dx_2\,dx_3}_{\substack{V\\ \text{volume della sfera}}} = R\underbrace{\int_\Sigma dS}_{\substack{\Sigma\\ \text{superficie della sfera} = 4\pi R^2}} \implies V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

oscillatore armonico. (è monodimensionale)



facciamo 2 analisi

1) a partire dalla legge di Newton

2) usando l'energia

energia potenziale della molla

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$F = -\nabla U = -\frac{dU}{dx}$$ e ottengo la legge di Hooke

1) $$\bar{F} = m \bar{a}$$

$$F = -kx$$ legge di Hooke

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

eq diff dell'oscillatore

risolviamo l'eq diff

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$ la risolviamo per mezzo degli autovalori

pol. caratteristico: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x(t) = A e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}} t} + B e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

si può scrivere usando le formule di Eulero

$$x(t) = A\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + i \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right] + B\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - i \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right] =$$

$$= (A+B)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + i\,(A-B)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t =$$

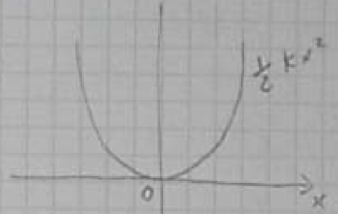
$$= C\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + D\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ periodo.

ora ragioniamo sulla conservazione dell'energia (2)

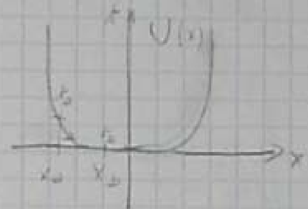
2)

$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ è una parabola



Prendiamo $U(x)$ arbitraria (pari) quindi diversa da una parabola

si tratta di un potenziale conservativo



$T + U = E$, costante

en. cinetica: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$ è un'eq. diff. di I ordine (rimane solo rappresentata la I costante dell'oscillatore)

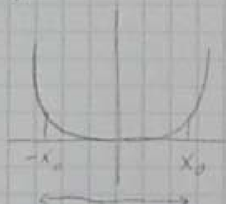
$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}$$

abbiamo sfruttato il punto di difficoltà usando la conservazione dell'energia. Rispetto a 1) c'è un'eq. di I ordine

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} = dt \quad \text{integro} \quad \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}} = t_b - t_a$$

ci permette di descrivere il periodo



il periodo è 2 volte il percorso da $-x_0$ a x_0

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} =$$

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}}$$

se $V(0) = 0$ (particella inizialmente ferma)

$E = U(x_0)$

10

quindi

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{U(x_0) - U(x)}}$$

il periodo di pendolo del potenziale (l'altezza da cui si trova a cadere la particella)

Il periodo non dipende dal potenziale nel caso di oscillatore armonico (sistema massa-molla)

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{U(x_0) - U(x)}} = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x^2}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{\cancel{2}}} \sqrt{\frac{\cancel{2}}{k}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} =$$ eseguo un cambio di variabile

$x = x_0 \cos\theta \qquad dx = -x_0 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$

se $x = x_0$, $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$

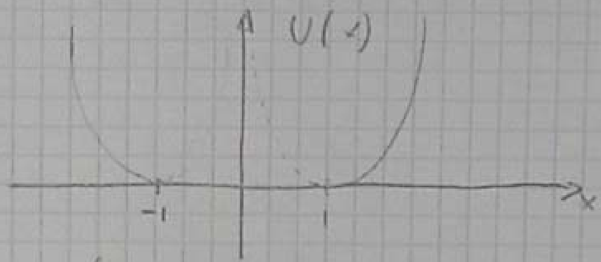
se $x = 0$, $\cos\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-x_0 \operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\sqrt{x_0^2 - x_0^2 \cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{x_0} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\cancel{x_0} \operatorname{sen}\theta} = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

il periodo non dipende dall'ampiezza iniziale dell'oscillazione solo in questo caso!

Vediamo se il periodo dipende dal potenziale (ampiezza iniziale) ③

$$U(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se} \quad x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



$(x_0 > 1$ oppure $x_0 < -1)$

simile a un potenziale armonico ma nel mezzo c'è un potenziale piatto

Nel tratto costante la V della particella è costante

il potenziale è pari $U(x) = U(-x)$

quindi $\int_{-x_0}^{x_0} = 2\int_0^{x_0}$

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{U(x_0) - U(x)}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{U(x_0)}} + 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_1^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{U(x_0)-(x-1)^2}} =$$

$U(x)=0$ perché

I tratto II tratto

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{U(x_0)}} + 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_1^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{U(x_0)-(x-1)^2}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{U(x_0)}} +$$

$$+ 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{U(x_0)}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{U(x_0) - U(x_0)\,\mathrm{sen}^2\theta}} =$$

Cambio di variabile: $x - 1 = \sqrt{U(x_0)}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$(x-1)^2 = U(x_0)\,\mathrm{sen}^2\theta$

$x = 1 + \sqrt{U(x_0)}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$dx = \sqrt{U(x_0)}\cos\theta\, d\theta$

se $x = 1$ $\mathrm{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

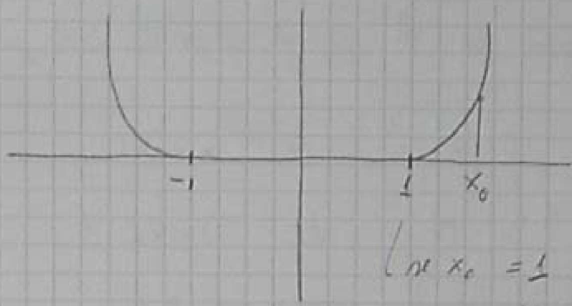
se $x = x_0$ $(x_0 - 1) = (x_0 - 1)\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\mathrm{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

mi sono ricordato che $U(x_0) = (x_0 - 1)^2$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{U(x_0)}} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{x_0 - 1} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{x_0 - 1} + \frac{\pi}{2}\right)$$



se $x_0 = 1$

$T = \infty$ perché la particella è sul tratto orizzontale e non si muove (aspetta un tempo perché torni)

---

abbiamo introdotto la legge di Hooke

$$F = -kx$$

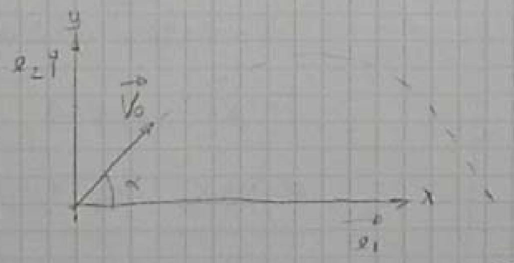
può essere anche che le forze siano proporzionali alla velocità (attrito viscoso)

viscoelasticità $\longrightarrow$ $F = -kV$

più la velocità è alta più l'opposizione è maggiore.

---

altro esercizio.



Lancio della particella (proiettile)

Considerando l'attrito dell'aria

$$\overline{V} = V_x \overline{e}_1 + V_y \overline{e}_2$$

$$F = -mg\, e_2 \underbrace{- mk\vec{V}}_{\text{attrito viscoso}} = m\frac{d\overline{V}}{dt}$$

si tratta di risolvere un'eq diff.

$$\begin{cases} -mk V_x = m\dfrac{dV_x}{dt} & \text{eq } x \\ -mg - mkV_y = m\dfrac{dV_y}{dt} & \text{eq } y \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + kV_x = 0 \\ \dfrac{dV_y}{dt} + kV_y = -g \end{cases}$$

$\longrightarrow \lambda + k = 0 \quad \lambda = -k$

$\longrightarrow$ non omogenea (bisogna trovare int generale + int particolare)

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{x0}\, e^{-kt} \\ V_y(t) = \underbrace{A e^{-kt}}_{\text{sol gen}} + \underbrace{-\dfrac{g}{k}}_{\text{sol partic}} \end{cases}$$

quando c'è attrito viscoso il risultato sempre un esponenziale

pongo $V_y = H$

diventa

$kH = -g$

$H = -\frac{g}{k}$

pongo le cond. iniz. 5

$$A - \frac{g}{k} = V_{y_0} \Rightarrow A = V_{y_0} + \frac{g}{k}$$

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{x_0}\, e^{-kt} \\ V_y(t) = \left(V_{y_0} + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases}$$

se pongo $k=0$ dovrebbe tornare la soluzione senza attrito viscoso. però $k=0$ crea un problema in $V_y(t)$ (è al denominatore)

$$V_y(t) = V_{y_0}\, e^{-kt} - g\, \frac{1-e^{-kt}}{k}$$

per $k \to 0$

il limite è una forma $\frac{0}{0}$ provo a applicare Hospital derivando rispetto a k

$$\frac{1-e^{-kt}}{k} \xrightarrow[k\to 0]{\lim} \frac{0+te^{-kt}}{1} \to t$$

quindi per $k \to 0$

$$V_{y_0}(t) = V_{y_0} - gt$$

determiniamo ora gli spostamenti x e y

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{x_0}\, e^{-kt} \\ V_y(t) = V_{y_0}\, e^{-kt} - g\, \frac{1-e^{kt}}{k} \end{cases}$$

pongo $\vec{g} = -g\vec{e}_2$

metto tutto in forma vettoriale

$$\bar{V}(t) = \bar{V}_0\, e^{-kt} + \vec{g}\, \frac{1-e^{-kt}}{k}$$

integro x trovare la posizione:

$$\bar{r}(t) = \int_0^t \bar{v}(t)\,dt = \bar{V}_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt + \vec{g}\int_0^t \frac{1-e^{-kt}}{k}\,dt =$$

$$= \bar{V}_0 \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^t + \vec{g}\,\frac{1}{k}\left[t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^t =$$

$$= \bar{V}_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k}\right) + \frac{\bar{g}}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{\vec{V}_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right) + \frac{\vec{g}\,t}{k} - \frac{\vec{g}}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right)$$

se $k \to 0$ la cosa è un po' più complicata di prima. Vediamo:

$$\underbrace{\frac{\vec{V}_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)}_{\text{tende a } t \text{ per } k\to 0} + \vec{g}\left(\frac{t}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-kt}}{k^2}\right)$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{t}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-kt}}{k^2} = \lim_{k\to 0} \frac{tk - 1 + e^{-kt}}{k^2} = \frac{0}{0}$$

proviamo de l'Hospital.

$$\lim_{k\to 0} \frac{t - t e^{-kt}}{2k} = \frac{t}{2}\lim_{k\to 0} \underbrace{\frac{1-e^{-kt}}{k}}_{\to t} = \frac{t^2}{2}$$ quindi diventa una parabola

quindi:

$$\vec{r}(t) = \vec{V}_0 t + \bar{g}\,\frac{t^2}{2}$$ moto del proiettile (senza viscosità)

1) Data $A(t)$ matrice dipendente da un parametro, trovare $\frac{dA}{dt}$

Intanto, $A = \{a_{ij}\}$ $i,j = 1 \ldots N$:

Teorema di Laplace
$$\begin{cases} \det A = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} \\ \forall j \quad \text{dove } A_{ij} = \{\text{matrice } A \text{ senza riga } i \text{ e colonna } j\} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}[\det A(t)] = \sum_{i,j} \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{d a_{ij}}{dt}$$

$$= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} (\det A_{ij}) \frac{d a_{ij}}{dt}$$

ma $$A^{-1} = \frac{B^t}{\det A}$$

dove $B_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

quindi

$$\boxed{\frac{d}{dt} \det A(t)} = \sum_{i,j} B_{i,j} \frac{d a_{ij}}{dt} =$$

$$= tr \left[B^T \frac{dA}{dt} \right] =$$

$$= tr \left[\det A \cdot A^{-1} \cdot \frac{dA}{dt} \right] =$$

$$= \boxed{\det A \;\; tr \left[A^{-1} \frac{dA}{dt} \right]}$$

2) Calcolare

$\bar{A}\wedge(\bar{B}\wedge\bar{C})$ e $(\bar{A}\wedge\bar{B})\wedge\bar{C}$

per il primo calcolo:

$$\bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) = \alpha\, \bar{e}_j + \beta\, \bar{e}_k \quad (*)$$

dove:

inverto

$$\alpha = \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) =$$

$$= (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_i) \cdot (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) = \delta_{ik}$$

e:

$$\beta = \bar{e}_k \cdot \bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) =$$

inverto

$$= (\bar{e}_k \wedge \bar{e}_i) \cdot (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) = -\delta_{ij}$$

per il secondo calcolo:

$$(\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \wedge \bar{e}_K = \alpha \bar{e}_i + \beta \bar{e}_J \quad (\#)$$

$$\alpha = (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \wedge \bar{e}_K \cdot \bar{e}_i =$$

$$= (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \cdot (\bar{e}_K \wedge \bar{e}_i) = -\delta_{JK}$$

$$\beta = (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \wedge \bar{e}_K \cdot \bar{e}_J =$$

$$= (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \cdot (\bar{e}_K \wedge \bar{e}_J) = \delta_{iK}.$$

quindi:

$$(*) \quad \boxed{\bar{e}_i \wedge (\bar{e}_J \wedge \bar{e}_K) = \delta_{iK} \bar{e}_J - \delta_{iJ} \bar{e}_K}$$

$$(\#) \quad \boxed{(\bar{e}_i \wedge \bar{e}_J) \wedge \bar{e}_K = \delta_{iK} \bar{e}_J - \delta_{JK} \bar{e}_i}$$

allora:

$$\boxed{\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C})} = a_i \bar{e}_i \wedge (b_j \bar{e}_j \wedge c_k \bar{e}_k) =$$

$$= a_i b_j c_k \, \bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) =$$

$$= a_i b_j c_k (\delta_{ik} \bar{e}_j - \delta_{ij} \bar{e}_k) =$$

$$= \boxed{(\bar{A} \cdot \bar{C}) \bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B}) \bar{C}}$$

analogamente

$$\boxed{(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C}} = (a_i \bar{e}_i \wedge b_j \bar{e}_j) \wedge c_k \bar{e}_k =$$

$$= a_i b_j c_k (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j) \wedge \bar{e}_k =$$

$$= a_i b_j c_k (\delta_{ik} \bar{e}_j - \delta_{jk} \bar{e}_i) =$$

$$= \boxed{(\bar{A} \cdot \bar{C}) \bar{B} - (\bar{B} \cdot \bar{C}) \bar{A}}$$

[3] dimostrare che $\boxed{\varepsilon_{sri}\,\varepsilon_{sjk} = \delta_{ik}\delta_{jr} - \delta_{ij}\delta_{kr}}$ 6

dalla prima (*):

$$\bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k) = \delta_{ik}\,\bar{e}_j - \delta_{ij}\,\bar{e}_k$$

moltiplico $\cdot\,\bar{e}_r$:

$$\bar{e}_i \wedge (\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k)\cdot \bar{e}_r = \delta_{ik}\,\delta_{jr} - \delta_{ij}\,\delta_{kr}$$

$$\downarrow$$

$$\bar{e}_i \wedge (\varepsilon_{sjk}\,\bar{e}_s)\cdot \bar{e}_r$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon_{qis}\,\bar{e}_q\cdot\bar{e}_r\,\varepsilon_{sjk}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon_{qis}\,\delta_{qr}\,\varepsilon_{sjk}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_{ris}\,\varepsilon_{sjk} = \delta_{ik}\,\delta_{jr} - \delta_{ij}\,\delta_{kr}}$$

oppure

$$\boxed{\varepsilon_{sri}\,\varepsilon_{sjk} = \delta_{ik}\,\delta_{jr} - \delta_{ij}\,\delta_{kr}}$$

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{Calcolare } \bar\nabla \wedge (\bar\nabla \wedge \bar V)}$

$$\bar\nabla \wedge (\bar\nabla \wedge \bar V) =$$

$$= \bar\nabla \wedge \left(\varepsilon_{qst}\frac{\partial}{\partial x_s} V_t \, \vec e_q\right) =$$

$$= \varepsilon_{lfq}\frac{\partial}{\partial x_f}\varepsilon_{qst}\frac{\partial V_t}{\partial x_s}\vec e_l =$$

$$= \varepsilon_{lfq}\varepsilon_{qst}\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_f \partial x_s}\bar e_l =$$

$$= \left(\delta_{ls}\delta_{ft} - \delta_{lt}\delta_{fs}\right)\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_f \partial x_s}\bar e_l =$$

$$= \delta_{ft}\frac{\partial^2 V_t}{\partial x_f \partial x_l}\bar e_l - \frac{\partial^2 V_t}{\partial x_f \partial x_s}\delta_{fs}\vec e_t =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial V_t}{\partial x_t}\bar e_l - \frac{\partial^2 V_t}{\partial x_f \partial x_f}\vec e_t$$

cioè:

$$\bar{\nabla}\wedge(\bar{\nabla}\wedge\bar{V}) = \underbrace{\bar{\nabla}}_{\text{grad}}\,(\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{V}}_{\text{div}}) - \underbrace{\bar{\nabla}^2}_{\text{Lap.}}\bar{V}$$

dove $\bar{\nabla}^2\bar{V} = \nabla^2 V_1\,\bar{e}_1 + \nabla^2 V_2\,\bar{e}_2 + \nabla^2 V_3\,\bar{e}_3$

$$= \nabla^2 V_i\,\bar{e}_i =$$

$$= \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_s \partial x_s}\,\bar{e}_i$$

(decomposizione di Helmholtz o teorema di Clebsch)

Dimostrare che ogni campo vettoriale $\bar{V}$ si può scrivere come somma di una parte irrotazionale ($\bar{\nabla}\phi$) ed una parte solenoidale ($\vec{A} : \bar{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$).

dim:

Si prenda ϕ tale che $\nabla^2\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$

Siccome $\bar{V}$ è noto si tratta di una equazione di Poisson (simile a quella per il potenziale elettrico generato da una densità di carica nel vuoto:

$\vec{E} = -\bar{\nabla}\phi$; $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$)

Essa ha sempre almeno una soluzione (la soluzione non è unica perché è sempre definita a meno di una funzione armonica, infatti se ψ è tale che $\nabla^2\psi = 0$, cioè armonica, cioè soddisfacente l'eq. di Laplace, allora $\phi+\psi$ soddisfa sempre $\nabla^2(\phi+\psi) = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$ (se $\nabla^2\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$).

Comunque, preso ϕ tale che $\nabla^2\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$

si definisce $\bar{A} = \bar{V} - \bar{\nabla}\phi$.

Dimostriamo che $\bar{A}$ è solenoidale:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = \bar{\nabla}\cdot\bar{V} - \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\phi) = \bar{\nabla}\cdot V - \nabla^2\phi$$

ma allora $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$ visto che ϕ soddisfa Poisson $\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \nabla^2\phi$.

Infine si osservi che $\bar{\nabla}\phi$ è sempre irrotazionale siccome $\bar{\nabla}\wedge\bar{\nabla}\phi = 0 \ \forall\phi$.

Dimostriamo anche questa ultima proprietà:

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla} \phi = \vec{e}_k \, \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} =$$

$$= \bar{e}_k \, \varepsilon_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

dove ε_{kij} è antisimmetrica negli indici i e j mentre $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$ è simmetrica negli indici i e j (teorema di Schwartz sulle derivate miste).

La saturazione comporta quindi

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla} \phi = 0 \quad \forall \phi .$$

La decomposizione è dimostrata.

Cenni su Fourier 3D

Data $f(\vec{r})$ si definisce

$$F(\bar{k}) = \mathcal{F}\{f(\bar{r})\} = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\bar{r})\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\, d\vec{r}$$

Si dimostra che

$$f(\bar{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\bar{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} F(\bar{k})\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\, d\vec{k}$$

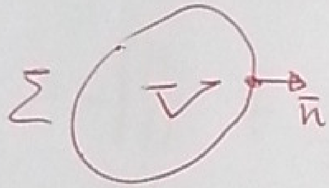
LA TRASFORMATA DI FOURIER È UTILE PERCHÈ TRASFORMA PROBLEMI DIFFERENZIALI IN PROBLEMI ALGEBRICI, RIDUCENDONE LA COMPLESSITÀ.

(Si può usare solo per funzioni $f(\bar{r})$ che vanno a zero in modo sufficientemente veloce quando $\|\bar{r}\| \to \infty$)

La proprietà fondamentale è la trasformata di una derivata parziale:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(\bar{r})}{\partial x_i}\right\} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f(\bar{r})}{\partial x_i}\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\, d\vec{r} \quad (\#)$$

Ora si deve usare una proprietà per parti 3D che deriva dal teorema della divergenza



$$\iiint_V \bar{\nabla}\cdot\bar{w}\, dv = \oint_\Sigma \bar{w}\cdot\bar{n}\, dS$$

prendiamo $\bar{w} = (\phi, 0, 0)$ allora

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dv = \oint_\Sigma \phi\, n_i\, dS$$

Se $\phi = \psi\cdot\chi$ si ha:

$$\iiint_V \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dv + \iiint_V \psi \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\, dv = \oint_\Sigma \psi\chi\, n_i\, dS$$

Se $\Sigma \to \infty$ cioè $V \to \mathbb{R}^3$ si ha

$$\iiint_{V \in \mathbb{R}^3} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, d\sigma = - \iiint_{V \in \mathbb{R}^3} \psi \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \, d\sigma \qquad (*)$$

Se χ e ψ vanno a zero in modo sufficientemente veloce.

Usiamo $(*)$ in $(\#)$:

$$F\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_i} e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \, d\bar{r} =$$

$$= - \iiint_{\mathbb{R}^3} f \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\right) d\bar{r} =$$

$$= - \iiint_{\mathbb{R}^3} f \, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \left(-i k_i\right) d\bar{r} =$$

$$= i k_i F\{f\}$$

$$\boxed{F\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = i k_i F\{f\}}$$

Quindi, derivare rispetto ad x_i nello spazio originale significa moltiplicare rispetto a ik_i nello spazio trasformato. Ecco perché problemi differenziali diventano problemi algebrici!

— — — —

Vediamo cosa implica la decomposizione di Helmholtz nello spazio trasformato:

Sappiamo che $\forall \bar{V}$:

$$\bar{V} = \bar{\nabla}\phi + \bar{A}$$

con ϕ: $\nabla^2\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$

ed $\bar{A} = \bar{V} - \bar{\nabla}\phi$

Con Fourier:

$$\phi(\bar{r}) \rightarrow \psi(\bar{k})$$
$$\bar{V}(\bar{r}) \rightarrow \mathcal{V}(\bar{k})$$
$$\bar{A}(\bar{r}) \rightarrow \mathcal{A}(\bar{k})$$

Poisson: $\nabla^2\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{V}$ cioè

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

nel dominio trasformato:

$$(ik_1)(ik_1)\psi + (ik_2)(ik_2)\psi + (ik_3)(ik_3)\psi$$
$$= ik_1\mathcal{V}_1 + ik_2\mathcal{V}_2 + ik_3\mathcal{V}_3$$

$$-(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\psi = i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{V}}$$

$$-\vec{k}\cdot\vec{k}\,\psi = i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{V}}$$

$$\boxed{\psi(\bar{k}) = -\frac{i\vec{k}\cdot}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\vec{\mathcal{V}}(\bar{k})}$$

Poisson nel dominio trasformato si risolve esplicitamente!

La decomposizione

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{\text{irrot.}} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{\nabla}\phi)}_{\text{solen.}}$$

diventa:

$$\vec{v} = i\vec{k}\psi + (\vec{v} - i\vec{k}\psi) =$$

$$= \vec{k}\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}(\vec{k})}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\right) + \left[\vec{v}(\vec{k}) - \vec{k}\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}(\vec{k})}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\right)\right]$$

ma $\vec{k}\cdot\vec{k} = \|\vec{k}\|^2$ quindi:

$$\boxed{\vec{v}(\vec{k}) = \underbrace{\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\left(\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\cdot\vec{v}(\vec{k})\right)}_{\vec{v}_{\parallel}(\vec{k})} + \underbrace{\left[\vec{v}(\vec{k}) - \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\left(\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\cdot\vec{v}(\vec{k})\right)\right]}_{\vec{v}_{\perp}(\vec{k})}}$$

adesso l'interpretazione diventa evidente:

- il primo termine $\bar{v}_{\parallel}(\bar{k})$ rappresenta la componente di $\bar{v}(\bar{k})$ lungo $\bar{k}$ (si noti che $\bar{k}/\|\bar{k}\|$ è un versore)

- il secondo termine, ottenuto per differenza, rappresenta la componente di $\bar{v}(\bar{k})$ ortogonale a $\bar{k}$.

- quindi:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{V}(\bar{r}) & = & \boxed{\text{irrotazionale}} & + & \boxed{\text{solenoidale}} \\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ \bar{v}(\bar{k}) & = & \boxed{\text{parallela a } \bar{k}} & + & \boxed{\text{ortogonale a } \bar{k}} \end{array}$$