

NOTE DI GEOMETRIA

Agosto -
Settembre 1996

DIFFERENZIALE

Linee multidimensionali	1
Rappresentazioni con parametro naturale	3
Formule di Frenet multidimensionali	5
Formule di Frenet tridimensionali	11
Superfici n -dimensionali	15
Prime forme quadratiche fondamentali	15
Caso tridimensionale	19
Seconda forma quadratiche fondamentali	21
Caso tridimensionale	25
Equazioni fondamentali della superficie	27
Equazioni per il caso tridimensionale	32
Equazioni di Gauss e di Weierstrass - Codazzi	33
Caso tridimensionale	38
Geodesiche	40
Note di una particella vincolata su una linea	47
Note di una particella vincolata su una superficie	51

LINEE MULTIDIMENSIONALI

1

S. definisce una linea multidimensionale una applicazione tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$.

$$\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad ; \quad t \in [a, b]$$

Una curva si dice regolare $\Leftrightarrow \left\| \frac{d\underline{x}}{dt} \right\| \neq 0$
 $\forall t \in [a, b]$.

S. definisce il versore tangente.

$$\underline{T}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt} / \left\| \frac{d\underline{x}}{dt} \right\|$$

lunghezza della linea :

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\frac{b-a}{\Delta t}} \frac{\left\| \underline{x}(a + k\Delta t) - \underline{x}(a + (k-1)\Delta t) \right\|}{\Delta t} \quad \Delta t =$$

$$= \int_a^b \left\| \frac{d\underline{x}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{d\underline{x}}{dt} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}} dt \Rightarrow$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i(t)}{dt} \right)^2} dt$$

La lunghezza delle curve in
coordinate curvilinee:

$$x_i = x_i(z_1 \dots z_n) \quad \forall i=1 \dots n$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right]} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n G_{jk}(z(t)) \frac{dz_j}{dt} \frac{dz_k}{dt}} dt$$

dove

$$G_{jk}(z(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial x_i}{\partial z_k}$$

Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt$$

RAPPRESENTAZIONE CON PARAMETRO NATURALE

2. definire la lunghezza d'arco:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}} dt$$

$$s(t) : [a, b] \rightarrow [0, L]$$

Verifichiamo che $\frac{ds}{dt} \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}} \geq 0 \quad (=0 \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = 0)$$

per linee regolari $s(t)$ è sempre crescente quindi invertibile: $\exists t(s)$.

La funzione $t(s)$ essendo invertibile è utilizzabile per fare un cambio di parametrizzazione:

$$\underline{r}(s) = \underline{r}(t(s))$$

Orz la curva si dice descritta con il parametro naturale (il parametro rappresenta la lunghezza della curva a partire dall'origine arbitrariamente fissata)

Si noti che:

$$\left\| \frac{d\underline{r}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| / \sqrt{\frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}} = 1$$

Sia $\underline{r}(s)$ una linea in $\mathbb{R}^n$ con parametrizzazione naturale. Siamo inoltre per ipotesi $\frac{d\underline{r}}{ds}, \dots, \frac{d^n \underline{r}}{ds^n}$ linearmente indipendenti e quindi base di $\mathbb{R}^n$. Tale base può essere ortonormalizzata con il metodo di Gram-Schmidt.

$$\frac{d\underline{r}}{ds} \dots \frac{d^n \underline{r}}{ds^n} \xrightarrow{\text{G.S.}} \underline{\hat{T}}_1 \dots \underline{\hat{T}}_n ; \text{ricorrendo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hat{T}}_1 = \frac{d\underline{r}}{ds} / \left\| \frac{d\underline{r}}{ds} \right\| \\ \underline{\hat{T}}_{k+1} = \frac{\frac{d^k \underline{r}}{ds^k} - \sum_{i=1}^k \left(\frac{d^k \underline{r}}{ds^k} \cdot \underline{\hat{T}}_i \right) \underline{\hat{T}}_i}{\left\| \frac{d^k \underline{r}}{ds^k} - \sum_{i=1}^k \left(\frac{d^k \underline{r}}{ds^k} \cdot \underline{\hat{T}}_i \right) \underline{\hat{T}}_i \right\|} \end{array} \right. \quad (\#)$$

Esiste quindi una matrice triangolare:

$$\underline{\hat{T}}_T(s) = \sum_{i=1}^T t_{T,i}(s) \frac{d^i \underline{r}}{ds^i} \quad \forall T=1..n$$

La matrice inversa di una matrice triangolare⁶ è triangolare quindi si ha:

$$\frac{d^i \underline{x}}{ds^i} = \sum_{j=1}^i t_{ij}^{-1}(s) \hat{T}_j(s) \quad \forall i=1..n$$

dove $t_{ij}^{-1}(s)$ è l'elemento generico della matrice inversa di T .

In forma matriciale:

$$\hat{T}(s) = \begin{bmatrix} \hat{T}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{T}_n(s) \end{bmatrix}; \quad \underline{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} \frac{d\Delta}{ds}(s) \\ \vdots \\ \frac{d^n \Delta}{ds^n}(s) \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & & 0 \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) & \\ t_{31}(s) & t_{32}(s) & t_{33}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \text{ triangolare inferiore.}$$

$$\hat{T}(s) = T(s) \underline{\Delta}(s)$$

$$\underline{\Delta}(s) = T^{-1}(s) \hat{T}(s)$$

(Si noti che con $\hat{T}$ (un vettore naturale) usando anche qui elemento di T è un vettore)

Adesso è utile sapere la derivata rispetto al parametro naturale del vettore.

delle base ortonormali $\underline{\tau}_i(s)$:

7

$$\frac{d\underline{\tau}(s)}{ds} = \frac{dT(s)}{ds} \underline{\Delta}(s) + T(s) \frac{d\underline{\Delta}(s)}{ds}$$

ponendo $\frac{d^{u+1} \underline{x}(s)}{ds^{u+1}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(s) \frac{d^i \underline{x}(s)}{ds^i}$ (le derivate $1^a, \dots, u^a$ formano una base)

Si ha :

$$\frac{d\underline{\Delta}(s)}{ds} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \underline{\Delta}(s) \triangleq R \underline{\Delta}(s)$$

allora :

$$\frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} = \left[\frac{dT(s)}{ds} T^{-1}(s) + T(s) R(s) T^{-1}(s) \right] \underline{\Gamma}(s)$$

$$\boxed{\frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} = A(s) \underline{\Gamma}(s)}$$

$$\text{con } \boxed{A(s) = \frac{dT(s)}{ds} T^{-1}(s) + T(s) R(s) T^{-1}(s)}$$

Il primo addendo della matrice A è necessariamente triangolare inferiore.

Il mondo addato è sicuramente
 molto oltre la 'prima sopradegale'.
 La definitiva A è una matrice nulla
 oltre la prima sopradegonale cioè:

$$\boxed{\frac{d\hat{T}_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^{i+1} a_{ij}(s) \hat{T}_j(s)}$$

Ma la matrice A possiede anche
 la seguente proprietà:

$$\hat{T}_i(s) \cdot \hat{T}_k(s) = \delta_{ik} \rightarrow \text{derivando:}$$

$$\frac{d\hat{T}_i(s)}{ds} \cdot \hat{T}_k(s) = - \hat{T}_i(s) \cdot \frac{d\hat{T}_k(s)}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}_i(s)}{ds} \cdot \hat{T}_k(s) &= \sum_{j=1}^{i+1} a_{ij}(s) \hat{T}_j(s) \cdot \hat{T}_k(s) = \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} a_{ij}(s) \delta_{jk}(s) \end{aligned}$$

de cui:

$$\frac{d\tilde{T}_i(s)}{ds} \cdot \tilde{T}_k(s) = Q_{ik}(s)$$

inoltre

$$\frac{d\tilde{T}_k(s)}{ds} \cdot \tilde{T}_i(s) = Q_{ki}(s)$$

ma allora

$$Q_{ik}(s) = -Q_{ki}(s)$$

cioè $A(s)$ è antisimmetrico.

$A(s)$ essendo nulla oltre la prima
soprad diagonale e antisimmetrica risulta
fatta così:

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & +a_{12} & 0 & & \\ -a_{12} & 0 & +a_{23} & & \\ 0 & -a_{23} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & +a_{n-1,n} \\ 0 & & & -a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

pongo $a_{i,i+1} = K_{i+1}(s)$ de cui:

$$\frac{d\tilde{T}_i(s)}{ds} = K_{i+1} \tilde{T}_{i+1} - K_i \tilde{T}_{i-1} \quad \forall i=1..n$$

$$K_1 = K_{n+1} = 0$$

Abbiamo dimostrato il teorema:

10

Sia $\underline{r}(s)$ una curva regolare con
parametro naturale e con $\frac{d\underline{r}}{ds} \dots \frac{d^m \underline{r}}{ds^m}$
lin. indep. Allora $\exists k_2(s) \dots k_m(s)$
tal. che $\underline{r}(s)$ soddisfa le relazioni
di Frenet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{T}_1}{ds} = k_2(s) \underline{T}_2(s) \\ \frac{d\underline{T}_2}{ds} = k_3(s) \underline{T}_3(s) - k_2(s) \underline{T}_1(s) \\ \vdots \\ \frac{d\underline{T}_{m-1}}{ds} = k_m(s) \underline{T}_m(s) - k_{m-1}(s) \underline{T}_{m-2}(s) \\ \frac{d\underline{T}_m}{ds} = -k_m \underline{T}_{m-1}(s) \end{array} \right.$$

FORMULE DI FRENET TRIDIMENSIONALI

11

Dal paragrafo precedente si ottiene che:
data una curva $\underline{r}(s): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con
parametro naturale tale che $\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}$
sono l'n. indep $\exists \kappa_2(s)$ e $\kappa_3(s)$ tal.
che:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{T}_1}{ds} = \kappa_2(s) \underline{T}_2(s) \\ \frac{d\underline{T}_2}{ds} = \kappa_3(s) \underline{T}_3(s) - \kappa_2(s) \underline{T}_1(s) \\ \frac{d\underline{T}_3}{ds} = -\kappa_3(s) \underline{T}_2(s) \end{cases}$$

usando Gram-Schmidt e la condizione $\|\frac{d\underline{r}}{ds}\| = 1$:

$$\underline{T}_1(s) = \frac{\frac{d\underline{r}}{ds}}{\|\frac{d\underline{r}}{ds}\|} = \frac{d\underline{r}}{ds} \triangleq \underline{t}(s) \quad \text{versore tangente}$$

$$\underline{T}_2(s) = \frac{\frac{d^2\underline{r}}{ds^2} - \left(\frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds}\right) \frac{d\underline{r}}{ds}}{\left\| \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} - \left(\frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds}\right) \frac{d\underline{r}}{ds} \right\|}$$

$$\text{ma da } \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds} = 0$$

quindi $\underline{T}_2(s) = \frac{\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \right\|} = \underline{n}(s) \quad \text{versore normale}$

$$\underline{T}_3(s) = \frac{\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} - \left(\frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \frac{d \underline{r}}{ds} \right) \frac{d \underline{r}}{ds} - \left(\frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right) \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right\| \left\| \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right\|}$$

ma è noto che:

Lemma $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^3; \|\underline{A}\| = \|\underline{B}\| = 1; \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow$

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \text{sgn}[\underline{W} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B})] = \frac{\underline{W} - \langle \underline{W}, \underline{A} \rangle \underline{A} - \langle \underline{W}, \underline{B} \rangle \underline{B}}{\|\underline{W} - \langle \underline{W}, \underline{A} \rangle \underline{A} - \langle \underline{W}, \underline{B} \rangle \underline{B}\|}$$

per $\underline{W}$ non complanare con $\underline{A}$ e $\underline{B}$

quindi:

$$\underline{T}_3(s) = [\underline{T}_1(s) \wedge \underline{T}_2(s)] \cdot \text{sgn} \left[\frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \underline{T}_1 \wedge \underline{T}_2 \right]$$

versore binormale

Soltamente i tre versori vengono definiti. Come segue fissando il $\text{sgn}[\dots]$ nella def. di $\underline{T}_3$; il sgn verrà tenuto in conto in $\underline{T}_3(s)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{t} = \frac{d \underline{r}}{ds} & \text{versore tangente} \\ \underline{n} = \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} / \left\| \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right\| & \text{versore normale} \\ \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} & \text{versore binormale} \end{array} \right.$$

de $\underline{e}_i$:

13

$$\begin{cases} \frac{d\underline{t}}{ds} = \kappa(s) \underline{u}(s) \\ \frac{d\underline{u}}{ds} = \tau(s) \underline{b}(s) - \kappa(s) \underline{t}(s) \\ \frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau(s) \underline{u}(s) \end{cases}$$

κ = courbure
 τ = torsion

On

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right\|$$

et par $\tau(s)$ si G_2

$$\tau(s) = - \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{u}(s) = - \frac{d}{ds} (\underline{t} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{u} =$$

$$= - \left(\underline{t} \wedge \frac{d\underline{u}}{ds} \right) \cdot \underline{u} = - \left(\frac{d\underline{u}}{ds} \wedge \frac{d}{ds} \left(\kappa^{-1} \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right) \right) \cdot \kappa^{-1} \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} =$$

$$= \kappa^{-2}(s) \left[\frac{d\underline{u}}{ds} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \wedge \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \right]$$

$$\tau(s) = \frac{\frac{d\underline{u}}{ds} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \wedge \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3}}{\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}}$$

Si può pensare ad un parametro generale t .

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^3t}{ds^3}$$

da cui:

$$\kappa(t) = \sqrt{\frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)}{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^3}}$$

$$\tau(t) = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \wedge \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)}$$

Teorema fondamentale delle curve:

Quando sono noti $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ esso
 allora esiste una ed una sola curva spaziale
 determinata a meno di traslazioni.

Superfici n-dimensionali

15

S. definisce come superficie una applicazione tra $\mathbb{R}^{n-1}$ ed $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{r}(\underline{u}) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Considerando variabile almeno uno dei parametri $\underline{u}$ si ottiene una curva con vettore tangente $\frac{\partial \underline{r}(\underline{u})}{\partial u_j}$.

Una superficie si dice regolare quando i vettori $\left\{ \frac{\partial \underline{r}(\underline{u})}{\partial u_j} \right\}$ sono linearmente

indipendenti; in tali ipotesi esiste un vettore normale a tutti due componenti

la base di $\mathbb{R}^n$: $\left\{ \frac{\partial \underline{r}(\underline{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \underline{r}(\underline{u})}{\partial u_{n-1}}, \underline{n} \right\}$

Da ora in poi consideriamo $\underline{n}$ normalizzato.

$$\|\underline{n}(\underline{u})\| = 1$$

Prima forma quadratica fondamentale

16

Se $u_1 = u_1(t)$ e ... $u_m = u_m(t)$ si ottiene una linea giacente sulla superficie:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(u_1(t) \dots u_m(t)) \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n(u_1(t) \dots u_m(t)) \end{cases}$$

È possibile calcolare la lunghezza d. una tale linea:

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}} dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt}} dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} g_{jk}(\underline{u}(t)) \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}} dt$$

dove

$$g_{jk}(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_k}$$

1^a FORMA
QUADRATICA
FONDATALE

Prima forma quadratica
si esprime anche gl. angol. tra
2 direzioni tangenti sulla superficie:

12

$$\cos \theta_{ij} = \frac{\frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j}}{\left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} \right\|} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}$$

$$\sin \theta_{ij} = \sqrt{1 - \frac{g_{ij}^2}{g_{ii} g_{jj}}} = \frac{\sqrt{g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}$$

Si la curve e' data in forma esplicita
 $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ allora la 1° forma
 diventa:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = u_{n-1} \\ x_n = f(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$g_{jk} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{ij} \delta_{ik} + \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \frac{\partial x_n}{\partial u_k} = \delta_{jk} + \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \frac{\partial x_n}{\partial u_k}$$

$$\boxed{g_{jk} = \delta_{jk} + \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \frac{\partial x_n}{\partial u_k}}$$

La sup. è data in forma implicita: 18

$$F(x_1 \dots x_n) = 0 \Rightarrow x_n = x_n(x_1 \dots x_{n-1})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

$$\boxed{g_{JK} = g_{JK} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_J} \frac{\partial F}{\partial x_K}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}}$$

Lemma

Se $\underline{x}_1 \dots \underline{x}_m$ sono lin. indep. in $\mathbb{R}^n$ allora

$$\det \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 & \dots \\ \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & m \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{e viceversa} \quad (m \leq n)$$

dim.

ipotesi

$\underline{x}_1 \dots \underline{x}_m$ lin. dip. $\Rightarrow \exists c_1 \dots c_m$ non tutti nulli
tal. da $\sum c_i \underline{x}_i = 0 \Rightarrow$

$$\sum c_i (\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j) = 0 \quad \text{e } c_i \text{ non tutti nulli}$$

$$\Rightarrow \det(\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j) \neq 0 \text{ è impossibile} \Rightarrow$$

$$\det(\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j) = 0$$

$$\det(\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j) = 0 \Rightarrow \sum_i C_i (\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{dove } \underline{x}_j \cdot \sum_i C_i \underline{x}_i = 0 \quad \square$$

$$\Rightarrow \sum_j C_j \underline{x}_j \cdot \sum_i C_i \underline{x}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_j C_j \underline{x}_j = 0 \Rightarrow \{\underline{x}_j\} \text{ l.n. d.p.}$$

C.V.D.

Lemma

Se $\frac{\partial R}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial u_{n-1}}$ sono lin. indip allora

g è invertibile:

dim $g_{ij} = \frac{\partial R}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial u_j}$ quindi segue subito
dal lemma precedente. C.V.D.

Caso tridimensionale

lunghezza delle linee sulla superficie $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

$$E = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial R}{\partial u} ; \quad F = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial R}{\partial v} ; \quad G = \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial R}{\partial v}$$

Il vettore normale è facilmente esprimibile:

$$\underline{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\|}$$

L'angolo tra le linee parametriche

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \end{cases}$$

Area della superficie:

$$A = \iint_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Lemma

$$\left\| \underline{A} \wedge \underline{B} \right\|^2 = \begin{vmatrix} \underline{A} \cdot \underline{A} & \underline{A} \cdot \underline{B} \\ \underline{B} \cdot \underline{A} & \underline{B} \cdot \underline{B} \end{vmatrix}$$

quindi:

$$A = \iint_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Seconda forma quadratica fondamentale

21

Si considera una linea sulla superficie
denotata con parametrizzazione normale
e si calcola il prodotto scalare tra
normale alla linea e normale alla
superficie.

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \underline{m} = \text{curvatura normale}$$

della linea sulla
sup. (vedere il
paragrafo
sulla geometria
per i dettagli
relativi a
tale convenzione)

$$\frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \underline{m} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \underline{m} \right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \underline{m} + \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{d\underline{m}}{ds} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \underline{m} = - \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{d\underline{m}}{ds} =$$

$$= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \frac{du_j}{ds} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{m}}{\partial u_k} \frac{du_k}{ds} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \quad \text{dove}$$

$$f_{jk} = - \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u_k}$$

2° forma quadratica
fondamentale

li possono ricavare altre forme:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\underline{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\sum_{j=1}^{u-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \frac{du_j}{ds} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{u-1} \sum_{k=1}^{u-1} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_k \partial u_j} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \sum_{j=1}^{u-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \frac{d^2 u_j}{ds^2}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \underline{m} = \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_k \partial u_j} \cdot \underline{m} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds}$$

quindi:

$$\rho_{jk} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_k \partial u_j} \cdot \underline{m}$$

ed ancora

$$\rho_{jk} = - \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u_j}$$

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \underline{m} = \sum_{j=1}^{u-1} \sum_{k=1}^{u-1} \rho_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds}$$

curvatura
normale
della
linea nel
punto.

la curvatura normale può essere
espressa in funzione di un qualsiasi
parametro t :

$$\frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} = \frac{du_j}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{du_k}{dt} \frac{dt}{ds}$$

23

$$\text{ma } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \quad \text{ed inoltre}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \cdot \underline{m}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}}$$

Fissato il punto sulla superficie c. possono vedere le direzioni $\left\{ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\} \equiv \{\lambda_j\}$ in cui la traiettoria ha curvatura normale estrema:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \cdot \underline{m}(\mathbf{r}) = K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\sum_{jk} \lambda_j \lambda_k g_{jk} \quad K_n(\lambda) = \sum_{jk} f_{jk} \lambda_j \lambda_k$$

Allora gli estremi locali si hanno per $\frac{\partial K_n}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \forall \lambda_i$; derivando:

NOTA
Se non si fosse passati al parametro generale e
la curvatura normale ottenuta si dovesse
confrontare con il problema iniziale:

$$\min \sum_j \sum_k f_{jk} \lambda_j \lambda_k \quad \text{con il vincolo}$$

$$\frac{d\lambda_j}{ds} \frac{d\lambda_k}{ds} = 1 \Rightarrow \sum_j \sum_k g_{jk} \lambda_j \lambda_k = 1$$

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = \sum_j \sum_k f_{jk} \lambda_j \lambda_k - \alpha \left[\sum_j \sum_k g_{jk} \lambda_j \lambda_k - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} &= \sum_k f_{jk} \delta_{js} \lambda_k + \sum_k f_{jk} \lambda_j \delta_{ks} - \alpha \sum_k g_{jk} \delta_{js} \lambda_k + \\ &\quad - \alpha \sum_k g_{jk} \delta_{ks} \lambda_j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k f_{jk} \lambda_k + \sum_k f_{jk} \lambda_j - \alpha \sum_k g_{jk} \lambda_k - \alpha \sum_k g_{jk} \lambda_j = \\ &= 2 \left(\sum_k f_{jk} \lambda_k - \alpha \sum_k g_{jk} \lambda_k \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\sum_k f_{jk} \lambda_k}{\sum_k g_{jk} \lambda_k}$$

$$\sum_k f_{jk} \lambda_k - \alpha \sum_k g_{jk} \lambda_k = 0 \Rightarrow \sum_k f_{jk} \lambda_k ds - \alpha \sum_k g_{jk} \lambda_k ds = 0$$

$$\alpha = \frac{\sum_j \sum_k f_{jk} \lambda_j \lambda_k}{\sum_j \sum_k g_{jk} \lambda_j \lambda_k} \Rightarrow$$

$$\sum_k (f_{jk} \lambda_k - \alpha g_{jk} \lambda_k) ds = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

$$\sum_{j,k} \frac{\partial \lambda_j \lambda_k}{\partial \lambda_i} g_{jk} K_n(\lambda) + \sum_{j,k} \underbrace{\frac{\partial K_n(\lambda)}{\partial \lambda_i}}_{\text{nullo per ipotesi di estremo}} \lambda_j \lambda_k g_{jk} =$$

$$= \sum_{j,k} f_{jk} \frac{\partial \lambda_j \lambda_k}{\partial \lambda_i}$$

ma $\frac{\partial \lambda_j \lambda_k}{\partial \lambda_i} = \delta_{ji} \lambda_k + \delta_{ki} \lambda_j$ quindi:

$$\sum_k g_{ik} \lambda_k K_n + \sum_j g_{ij} \lambda_j K_n = \sum_k f_{ik} \lambda_k + \sum_j f_{ij} \lambda_j$$

$$\sum_k g_{ik} \lambda_k K_n = \sum_k f_{ik} \lambda_k$$

$$\sum_k (g_{ik} K_n - f_{ik}) \lambda_k = 0$$

equazione scalare
che fornisce i
valori estremi
delle curviture
normali. infatti:

• $\lambda_k \neq 0$ per almeno un k :

$$\det(G K_n F) = 0$$

$$\det G \neq 0 \Rightarrow$$

$$\det(G^{-1} F - K_n I) = 0$$

cioè: i valori estremi delle curviture
normali sono gli autovalori di $G^{-1} F$.

Base tridimensionale

La seconda forma è: $\underline{m} = e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$

dove

$$e = - \frac{\partial \underline{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial u^2} \cdot \underline{m} = \frac{\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{h}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$f = - \frac{\partial \underline{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} = - \frac{\partial \underline{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial u \partial v} \cdot \underline{m} = \frac{\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{h}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$g = - \frac{\partial \underline{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} = \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial v^2} \cdot \underline{m} = \frac{\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{h}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

L'equazione per la curvatura estrema (normale):

$$\det \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} K_n - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} EK_n - e & FK_n - f \\ FK_n - f & GK_n - g \end{pmatrix} = 0$$

È una equazione di 2° grado con soluzioni G_1 e G_2 :

$$(Ek_u - e)(gk_u - g) - (Fk_u - f)^2 = 0$$

$$Egk_u^2 - eGk_u - Egk_u + eg - (Fk_u^2 - 2Ffk_u + f^2) = 0$$

$$(EG - F^2)k_u^2 - (eG + Eg - 2Ff)k_u + eg - f^2 = 0$$

$$K_1 = \frac{eG + Eg - 2Ff + \sqrt{(eG + Eg - 2Ff)^2 - 4(EG - F^2)(eg - f^2)}}{2(EG - F^2)}$$

$$K_2 = \frac{eG + Eg - 2Ff - \sqrt{(eG + Eg - 2Ff)^2 - 4(EG - F^2)(eg - f^2)}}{2(EG - F^2)}$$

Poiché si definiscono :

$$M = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad \text{curvatura media e}$$

$$K = K_1 K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{curvatura Gaussiana.}$$

da cui infine:

$$K_1, K_2 = M \pm \sqrt{M^2 - K}$$

Equazioni fondamentali della superficie

Consideriamo la superficie multidimensionale

$\underline{x} = \underline{x}(\underline{u}) : \mathbb{R}^{u-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - Supponiamo che

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_{u-1}}$ sono lin. indep. e completati

o base di $\mathbb{R}^n$ da $\underline{m}$ ($\underline{m} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} = 0 \ \forall j$) ($\underline{m} \cdot \underline{m} = 1$)

Allora si possono fare gli sviluppi:

$$\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{u-1} \begin{Bmatrix} i & j \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_k} + \sum_{ij} \underline{a}_{ij} \underline{m} \quad (A)$$

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{u-1} \beta_{kj} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_k} + \alpha_j \underline{m} \quad (B)$$

Bisogna ora calcolare i coefficienti

$\begin{Bmatrix} i & j \\ k \end{Bmatrix}$, $\underline{a}_{ij}$, β_{kj} , α_j nel seguente modo:

$$(A) \cdot u \Rightarrow \frac{\partial' \underline{u}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot u = \Sigma_{ij} \Rightarrow \Sigma_{ij} = f_{ij} \text{ (2° forma)}$$

$$(A) \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\} g_{ks}$$

Il primo membro di queste equazioni, in $\left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\}$ è detto simbolo di Christoffel di prima specie; $\left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\}$ è detto simbolo di Christoffel di seconda specie.

$$\left[\begin{matrix} i & j \\ s \end{matrix} \right] = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} \quad \text{e a. h. anche:}$$

$$\left[\begin{matrix} i & j \\ s \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} \right) \quad \text{1° specie}$$

Infatti:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} \right) + \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} \right) - \frac{\partial}{\partial u_s} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_j} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial u_j \partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_j \partial u_s} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_i \partial u_s} + \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_s \partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_j} - \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_s \partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_i} \right] = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial u_s}$$

Allora:

23

$$\begin{bmatrix} i & J \\ s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} i & J \\ k \end{bmatrix} g_{sk} \quad e^{-}$$

Una equazione nei simboli di 2° specie
noti i simboli di 1° specie:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n-1} g_{ps}^{-1} \begin{bmatrix} i & J \\ s \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} i & J \\ k \end{bmatrix} \sum_{s=1}^{n-1} g_{ps}^{-1} g_{sk} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} i & J \\ k \end{bmatrix} \delta_{pk} = \begin{bmatrix} i & J \\ p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{bmatrix} i & J \\ p \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{n-1} g_{ps}^{-1} \begin{bmatrix} i & J \\ s \end{bmatrix} \quad 2^{\text{a}} \text{ specie}$$

la formula (A) diventa:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} i & J \\ k \end{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} + p_{ij} M$$

Equation di Gauss

Permane alle equazioni (B):

30

$$\textcircled{B}. \underline{M} \Rightarrow \frac{\partial \underline{M}}{\partial u_J} \cdot \underline{u} = \lambda_J \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_J} (u \cdot u) = \lambda_J$$

$n+2 \quad u \cdot u = 1 \Rightarrow \lambda_J = 0.$

$$\textcircled{B}. \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_h} \Rightarrow \frac{\partial \underline{M}}{\partial u_J} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_h} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kJ} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_h} \Rightarrow$$

$$- f_{Jh} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kJ} g_{hk}$$

Equazioni in β_{kJ} .

$$f_{Jh} + \sum_{k=1}^{n-1} g_{hk} \beta_{kJ} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_{kJ} = - \sum_{h=1}^{n-1} g_{hk}^{-1} f_{hJ}$$

Allora:

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial u_J} = - \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{Jh} g_{hk}^{-1} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k}$$

Formula di Weingarten

Le formule di Gauss-Weingarten sono le relazioni fondamentali delle forme della superficie.

Equation per il caso tridimensionale

31

Equation di Gauss:

$$\frac{\partial' \underline{R}}{\partial^2 u} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial v} + e \underline{M}$$

$$\frac{\partial' \underline{R}}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial v} + f \underline{M}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial v} + g \underline{M}$$

Simboli 1° specie

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}$$

Simboli di 2° specie:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{-F \frac{\partial E}{\partial u} + 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{G \frac{\partial E}{\partial V} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial V}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{-F \frac{\partial G}{\partial V} + 2G \frac{\partial F}{\partial V} - G \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial V} + F \frac{\partial G}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial V}}{2(EG - F^2)}$$

Gleichungen d. Weingarten:

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \frac{pF - eG}{EG - F^2} \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{eF - pE}{EG - F^2} \frac{\partial R}{\partial v}$$

$$\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{pF - gE}{EG - F^2} \frac{\partial R}{\partial v}$$

Per quando al caso multidimensionale sono valide le relazioni già viste di Gauss:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} + f_{rs} \underline{M} \quad \textcircled{A} \\ \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial u_r \partial u_t} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r & t \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} + f_{rt} \underline{M} \quad \textcircled{B} \end{cases} \begin{array}{l} \text{da cui} \\ \text{derivando } \textcircled{A} \\ \text{rispetto ad } u_t \\ \text{e } \textcircled{B} \text{ rispetto ad } \\ u_s \text{ e sottraendo} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_t} \left[\left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} \right] + \frac{\partial}{\partial u_t} [f_{rs} \underline{M}] &= \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_s} \left[\left\{ \begin{matrix} r & t \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} \right] + \frac{\partial}{\partial u_s} [f_{rt} \underline{M}] \quad [*] \end{aligned}$$

Globalmente il 1° membro:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial u_t \partial u_k} \right] + \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} \underline{M} + f_{rs} \frac{\partial \underline{M}}{\partial u_t} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} t & k \\ & j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_j} + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} f_{tk} \underline{M} \right] + \\ &+ \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} \underline{M} + f_{rs} \left(- \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{tk} g_{hk}^{-1} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k} \right) \end{aligned}$$

Allora:

34

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 \underline{\Omega}}{\partial u_r \partial u_s \partial u_k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t k \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_j} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} p_{tk} \underline{M} + \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} \underline{M} - \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{rs} f_{th} g_{hk}^{-1} \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_k} = \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t j \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{h=1}^{n-1} f_{rs} f_{th} g_{hk}^{-1} \right] \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_k} + \\
 &+ \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} p_{tk} + \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} \right] \underline{M}
 \end{aligned}$$

la relazione (*) diventa:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t j \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{h=1}^{n-1} f_{rs} f_{th} g_{hk}^{-1} \right] \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_k} + \\
 &+ \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} p_{tk} + \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} \right] \underline{M} = \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u_s} \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r t \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s j \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{h=1}^{n-1} f_{rt} f_{sh} g_{hk}^{-1} \right] \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial u_k} + \\
 &+ \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} p_{sk} + \frac{\partial f_{rt}}{\partial u_s} \right] \underline{M}
 \end{aligned}$$

Essendo $\left\{ \frac{\partial E}{\partial u_k} \forall k, m \right\}$ una base si possono
 esprimere i coefficienti ottenendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t j \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{h=1}^{n-1} f_{rs} f_{th} g_{kh}^{-1} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial u_s} \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r t \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s j \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{h=1}^{n-1} f_{rt} f_{sh} g_{kh}^{-1} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} f_{tk} + \frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} f_{sk} + \frac{\partial f_{rt}}{\partial u_s} \end{aligned} \right.$$

Si definiscono i simboli di Riemann d.
 d. 2° specie:

$$\left\{ \begin{matrix} r k, s t \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial u_t} \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_s} \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left\{ \begin{matrix} r s \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t j \\ k \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r t \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s j \\ k \end{matrix} \right\} \right]$$

2° SPECIE
 RIEMANN

ed anche quelli d. 1° specie:

$$(r_J, st) = \sum_{k=1}^{n-1} g_{kJ} \{r_k, st\} \quad \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ SPECIE} \\ \text{RIEDANNA} \end{array}$$

Invertendo:

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^{n-1} g_{mJ}^{-1} (r_J, st) &= \sum_{J,k=1}^{n-1} g_{mJ}^{-1} g_{kJ} \{r_k, st\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{mk} \{r_k, st\} = \{r_m, st\} \end{aligned}$$

$$\{r_m, st\} = \sum_{J=1}^{n-1} g_{mJ}^{-1} (r_J, st)$$

Allora le eq. diventano:

$$\left\{ \begin{aligned} \{r_k, st\} &= \sum_{h=1}^{n-1} (p_{rs} p_{th} - p_{rt} p_{sh}) g_{hk}^{-1} \\ \frac{\partial p_{rs}}{\partial u_t} - \frac{\partial p_{rt}}{\partial u_s} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{Bmatrix} r & t \\ k \end{Bmatrix} p_{sk} - \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} p_{tk} \right] \end{aligned} \right.$$

oppure in fine

37

$$(r_h, s_t) = f_{rs} f_{th} - f_{rt} f_{sh}$$

$$\frac{\partial f_{rs}}{\partial u_t} - \frac{\partial f_{rt}}{\partial u_s} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\begin{Bmatrix} r & t \\ k \end{Bmatrix} f_{sk} - \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} f_{tk} \right]$$

La prima è detta eq. d. Gauss e la seconda d. Mainardi - Codazzi : sono relazioni differenziali che legano la 1° e la 2° forma quadratiche.

Teorema

Se g_{ij} e f_{ij} sono date come funzioni di $u_1, \dots, u_{n-1}$, sufficientemente differenziabili e soddisfacenti le equazioni di Gauss e Mainardi - Codazzi allora esiste una superficie che li ammette come 1° e 2° forme differenziali (ovvero $\det G \neq 0$). Essa è unica a meno delle posizioni nello spazio.

La relazione di Gauss si esprime ponendo gli indici $r=1$; $s=1$; $t=2$; $h=2$

$$eg - f^2 = (12, 12) \quad (1)$$

La precedente esprime il determinante della seconda forma quadratica in funzione di un simbolo di Riemann e cioè della 1^a forma quadratica.

Essendo: $K = C_1 C_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ si ha:

$$K = \frac{(12, 12)}{EG - F^2} \quad \text{e cioè si}$$

esprime la curvatura gaussiana per mezzo della sola 1^a forma quadratica fondamentale.
(theorema egregium di Gauss).

La relazione di Meinard Codazzi divergenza:

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = e \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + f \left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) - g \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} = e \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} + f \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) - g \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Teorema

Se E, F, G, e, f, g sono funzioni date di u, v , sufficientemente differenziabili, che soddisfanno

① e ② con $EG - F^2 \neq 0$ allora esiste una superficie che le ammette come 1° e 2° forme differenziali. Questa sup. è unica a meno della posizione nello spazio.

Analisi d. una superficie in $\mathbb{R}^n$

Sia $X_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ una superficie in $\mathbb{R}^n$.
 Calcoliamo 1° forma, 2° forma, Koeffizienten di Christoffel
 e curvatura.

1° forma

$$\text{Sia } \begin{cases} X_1 = u_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} = u_{n-1} \\ X_n = f(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{cases} \quad \text{la forma}$$

parametrica della superficie.

Allora: $g_{ik} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} =$

$$= \left(0 \dots \overset{i}{1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \left(0 \dots \overset{k}{1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_k} \right) = \delta_{ik} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_k}$$

$$\boxed{g_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_k}} \quad \text{1° forma.}$$

Ex 2.10 $\begin{bmatrix} i & j \\ s \end{bmatrix}$

(2)

$$\begin{bmatrix} i & j \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_s} + \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} i & j \\ s \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_s}}$$

Simbolo $\begin{Bmatrix} i \\ p \end{Bmatrix}$

(3)

$$\begin{Bmatrix} i \\ p \end{Bmatrix} = g_{ps}^{-1} \begin{Bmatrix} i \\ s \end{Bmatrix}$$

$$g_{ps} = \delta_{ps} + \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_s} \Rightarrow [g] = I + \nabla f \cdot \nabla f^T \text{ de cui:}$$

$$[g]^{-1} = I - \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} \quad \text{infatti}$$

$$\begin{aligned} [g][g^{-1}] &= [I + \nabla f \cdot \nabla f^T] \left[I - \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} \right] = \\ &= I - \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} + \nabla f \nabla f^T - \frac{\nabla f (\nabla f^T \nabla f) \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} = \\ &= I + \frac{\nabla f \nabla f^T (1 + \nabla f^T \nabla f) - \nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} - \nabla f^T \nabla f \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} = \\ &= I + \nabla f^T \nabla f \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} - \nabla f^T \nabla f \frac{\nabla f \nabla f^T}{1 + \nabla f^T \nabla f} = I \end{aligned}$$

(4)

allora:

$$f_{PS}^{-1} = f_{PS} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_P} \frac{\partial f}{\partial x_S}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ p \end{matrix} \right\} = \left\{ f_{PS} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_P} \frac{\partial f}{\partial x_S}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} \right\} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_S}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P} \frac{\partial f}{\partial x_S} \frac{\partial f}{\partial x_S}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_S} \frac{\partial f}{\partial x_S} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P} \frac{\partial f}{\partial x_S} \frac{\partial f}{\partial x_S}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} i & j \\ p \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_P}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

2° forma

(5)

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \bar{m}$$

✓ per questa forma generale della normale si veda più avanti.

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{J_1 \dots J_{n-1}} \frac{\partial x_{J_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{J_{n-1}}}{\partial u_{n-1}} =$$

9

versione normale (normalizzata!)

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{J_1 \dots J_{n-1}}^{1 \dots n} \frac{\partial x_{J_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{J_{n-1}}}{\partial u_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \dots & \delta_i^n \\ \delta_{J_1}^1 & \dots & \delta_{J_1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{J_{n-1}}^1 & \dots & \delta_{J_{n-1}}^n \end{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \text{Le distribuisco sulle righe} \\ \text{dalla 2° alla n°esima} \end{matrix}}_{\frac{\partial x_{J_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{J_{n-1}}}{\partial u_{n-1}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \dots & \delta_i^n \\ \delta_{J_1}^1 \frac{\partial x_{J_1}}{\partial u_1} & \dots & \delta_{J_1}^n \frac{\partial x_{J_1}}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{J_{n-1}}^1 \frac{\partial x_{J_{n-1}}}{\partial u_{n-1}} & \dots & \delta_{J_{n-1}}^n \frac{\partial x_{J_{n-1}}}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

(6)

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \dots & \delta_i^m \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{m-1}} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_{m-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \dots & \delta_i^m \\ 1 & & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}} \end{vmatrix} \quad \text{if}$$

$$\Rightarrow m_k = (-1)^n \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{1}{\sqrt{g}} \quad k \neq m$$

$$m_m = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$\boxed{\bar{m} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, -1 \right)}$$

(7)

$$f_{ik} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \bar{m} =$$

$$= \left(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \ -1 \right) \frac{(-1)^n}{\sqrt{g}} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$\frac{1}{\sqrt{g}}$ normale a quindi:

$$\sqrt{g} = \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_5} \frac{\partial f}{\partial x_5}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{ik} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_5} \frac{\partial f}{\partial x_5}}}}$$

2° forma normale della superficie.

1° forma $g_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}$

(8)

2° forma $f_{ik} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_s}}}$ $i, k = 1 \dots n-1$

Dato un punto sulla superficie le $n-1$ curvatures normali estreme sono

dati da $\det(G^{-1}F - K_n I) = 0$.

Tale equazione ha $n-1$ soluzioni reali. La somma delle soluzioni autovalori fornisce la curvatura medio, il prodotto degli autovalori fornisce la curvatura gaussiana:

$$K_{\text{medio}} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} K_j = \frac{1}{n-1} \text{tr}(G^{-1}F)$$

$$K_{\text{gauss}} = \prod_{j=1}^{n-1} K_j = \det(G^{-1}F) = \frac{\det F}{\det G}$$

Le forme esplicite seguono:

$$g_{rs}^{-1} f_{sq} = \left(\delta_{rs} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_s}}{1 + \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial x_h}} \right) (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_q} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial x_h}}} =$$

(9)

$$= (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}}} - (-1)^{n+1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_q}}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{3/2}}$$

quindi:

$$\text{tr}(G^{-1}F) = g_{ps}^{-1} f_{sp} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}}} - (-1)^{n+1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_s}}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow K_{\text{media}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} \frac{(1 + \nabla f^T \nabla f) \partial^2 f - \nabla f^T H \nabla f}{(1 + \nabla f^T \nabla f)^{3/2}}$$

infine: $\det F = (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \det H \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_s}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

$$K_{\text{geom}} = \frac{(-1)^{n+1} \det H}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(-1)^{n+1} \det H}{\left(1 + \nabla f^T \nabla f\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Nel caso di superfici 2d
immesse in $\mathbb{R}^3$:

(10)

$$K_{media} = \frac{f_{xx}(1+f_y^2) + f_{yy}(1+f_x^2) - 2f_x f_{xy} f_y}{2 \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$K_{gauss} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2}$$

NOTA: Le direzioni principali sono sempre

ortogonali: da pag 24 $\rightarrow F \vec{\lambda} = \kappa G \vec{\lambda} \rightarrow$

Esistono due curvature reali date da $\det(G^{-1}F - \kappa I) = 0$

per cui $(\vec{\lambda}_1, \kappa_1)$ e $(\vec{\lambda}_2, \kappa_2)$ Tali che $F\vec{\lambda}_1 = \kappa_1 G\vec{\lambda}_1$ e $F\vec{\lambda}_2 = \kappa_2 G\vec{\lambda}_2$

da cui $\vec{\lambda}_2(F\vec{\lambda}_1) = \kappa_1 \vec{\lambda}_2(G\vec{\lambda}_1)$ e $\vec{\lambda}_1(F\vec{\lambda}_2) = \kappa_2 \vec{\lambda}_1(G\vec{\lambda}_2)$.

Sottitro, usando la simmetria di F ($G^{-1}F$ non è simmetrica)

$0 = (\kappa_1 - \kappa_2)(\vec{\lambda}_2 G \vec{\lambda}_1)$ e quindi visto che $\kappa_1 \neq \kappa_2$

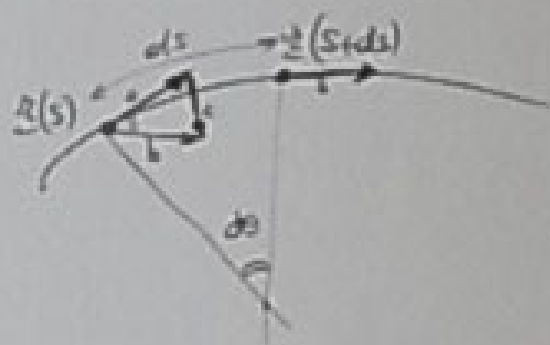
$\rightarrow \vec{\lambda}_2 [G \vec{\lambda}_1] = 0 \rightarrow g_{ij} \lambda_{2i} \lambda_{1j} = 0$

$\rightarrow$ direzioni ortogonali sulla superficie
di curvatura g_{ij} .

GEOMETRICHE

40

Consideriamo una linea n -dimensionale
con parametro naturale $\underline{r}(s): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Analizziamo il concetto di curvatura.



$$a = \frac{d\underline{r}}{ds}(s) \quad \|a\| = 1$$

$$b = \frac{d\underline{r}}{ds}(s+ds) \quad \|b\| = 1$$

$$c = \frac{d\underline{r}}{ds}(s+ds) - \frac{d\underline{r}}{ds}(s)$$

$$\|c\| = 2 \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$k(s) = \frac{1}{R(s)} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\theta}{ds} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} d\theta}{\sin \frac{d\theta}{2}} \cdot \frac{\|c\|}{ds} =$$

$$= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\left\| \frac{d\underline{r}}{ds}(s+ds) - \frac{d\underline{r}}{ds}(s) \right\|}{ds} = \left\| \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right\|$$

Allora

$$k(s) = \sqrt{\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}}$$

è la curvatura

di una generica linea n -dimensionale.

Consideriamo allora una linea di quest
tipo, con parametro naturale, giacente su
una superficie. Per queste condizioni
abbiamo già parlato in precedenza delle

curvatura normale della linea sulla
 superficie. In generale $\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}$

41

$$\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d \underline{x}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} \frac{du_j}{ds} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial u_j \partial u_k} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} \frac{d^2 u_j}{ds^2} \quad e$$

introducendo le equazioni fondamentali di Gauss:

$$\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} jk \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{jk} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j} \frac{d^2 u_j}{ds^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} jk \\ i \end{matrix} \right\} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \frac{d^2 u_i}{ds^2} \right] \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} + \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_{jk} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} \right] \underline{m}$$

Tale equazione permette il calcolo esatto
 della curvatura della linea.

Pengo

$$K_{g_i} = \sum_{J=1}^{n-1} \sum_{K=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} JK \\ i \end{matrix} \right\} \frac{du_K}{ds} \frac{du_J}{ds} + \frac{d^2 u_i}{ds^2}$$

$$K_m = \sum_{J=1}^{n-1} \sum_{K=1}^{n-1} f_{JK} \frac{du_K}{ds} \frac{du_J}{ds}$$

Allora:

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = \sum_{i=1}^{n-1} K_{g_i} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} + K_m \underline{M}$$

K_{g_i} = curvatura geodetica corrispondente all'i-esimo parametro

K_m = curvatura normale

La curvatura effettiva:

$$K^2 = \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = K_m^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} K_{g_i} g_{ij} K_{g_j} = K_m^2 + K_g^2$$

dove

$$K_g^2 = \sum_i \sum_j K_{g_i} g_{ij} K_{g_j}$$

curvatura geodetica

$$K^2 = K_m^2 + K_g^2$$

Una linea si dice geodetica quando $K_{g_i} = 0$ cioè quando $\underline{M} \parallel \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}$

62

NOTA

La curvatura geodetica dipendendo effettivamente dalla curva (dalle sue derivate seconde) misura quella normale solo dal punto e dalla direzione e quindi sono caratteristiche proprie della superficie: da qui derivano curvatura media e gaussiane.

Cioè una linea si dice geodetica quando 43
il vettore normale principale alla linea
è allineato con la normale alla

superficie. (la curvatura di una superficie in un punto
è descritta dalla curvatura delle geodetiche
passanti per quel punto)

L'equazione che governa le geodetiche è

allora $\boxed{K_g^2 = 0 \Rightarrow K_g \cdot \cos \theta_i}$ considerando

g_{ij} simmetrica definita positiva e cioè:

$$(\#) \quad \sum_j \sum_k \begin{Bmatrix} j & k \\ i \end{Bmatrix} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} + \frac{d^2 u_i}{ds^2} = 0$$

La condizione di parametro naturale è

cioè $\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1$

cioè
ovvero:

$$\sum_j \sum_k g_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} = 1$$

Si verifica facilmente che se valgono le

(#) allora $\frac{d}{ds} \left(\sum_j \sum_k g_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \right) = 0$ e

quindi basta porre la condizione iniziale
in modo da avere il parametro

naturale: $\sum_j \sum_k g_{jk} \frac{du_j(s_0)}{ds} \frac{du_k(s_0)}{ds} = 1$

Abbiamo quindi dimostrato che i soluzioni di (*) che rappresentano linee sulla superficie descritte con il parametro naturale. Tali linee hanno curvatura geodetica nulla e sono dette geodetiche. Vediamo ora la proprietà fondamentale delle geodetiche: le eq. (*) descrivono anche le linee sulla superficie che ha lunghezza minima e che sono sempre rappresentate con il parametro naturale.

Bisogna trovare il minimo di

$$\int_{\gamma} \sqrt{\sum_{j,k} g_{jk}(u) \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds}} ds$$

Con il vincolo $\sum_{j,k} g_{jk}(u) \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} = 1$.
Allora usiamo Eulero - Lagrange.

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \frac{1}{L^2} \sum_k g_{ik} \dot{u}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{1}{L^2} \sum_r \sum_k \frac{\partial g_{rk}}{\partial u_i} \dot{u}_r \dot{u}_k$$

Lemma : Along a geodesic $\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$
 L is conserved.

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial u_i} \dot{u}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \ddot{u}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \ddot{u}_i$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \ddot{u}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i \right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i - L \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{L^2} \sum_k g_{ik} \dot{u}_k \dot{u}_i - L \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (1 - L) = 0 \Rightarrow L = \text{constant} \quad \text{and}$$

The Lemma permits to replace the kinetic
 the pseudo-metric c of Ricci

the form ds^2 of the Einstein-Laplace

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = \frac{1}{f^2} \frac{d}{dt} \sum_k g_{ik} \dot{u}_k =$$

46

$$= \frac{1}{f^2} \sum_j \sum_k \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} \dot{u}_j \dot{u}_k + \frac{1}{f^2} \sum_k g_{ik} \ddot{u}_k$$

l'equation diventa:

$$\frac{1}{2f^2} \sum_j \sum_k \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \dot{u}_j \dot{u}_k = \frac{1}{f^2} \sum_j \sum_k \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_j} \dot{u}_j \dot{u}_k + \frac{1}{f^2} \sum_k g_{ik} \ddot{u}_k$$

$$\sum_k g_{ik} \ddot{u}_k + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \right) \dot{u}_j \dot{u}_k = 0$$

$$\sum_k g_{ik} \ddot{u}_k + \sum_j \sum_k \begin{bmatrix} j & k \\ i \end{bmatrix} \dot{u}_j \dot{u}_k = 0$$

grazie
"

$$\ddot{u}_s + \sum_j \sum_k \begin{Bmatrix} j & k \\ s \end{Bmatrix} \dot{u}_j \dot{u}_k = 0$$

2 equ. in orthonormal coordinate. initial
vel due: $\sum_j \sum_k g_{jk} \frac{du_j(r_0)}{ds} \frac{du_k(r_0)}{ds} = 1$

Moto d una particella vincolata su d una linea

47

Consideriamo una linea nello spazio
nota mediante le equazioni parametriche
e parametrizzazione normale $\underline{r} = \underline{r}(s)$.

Per essa come noto valgono le formule
di Frenet:

$$\begin{cases} \underline{T} = \frac{d\underline{r}}{ds} \\ \underline{N} = \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} / \left\| \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \right\| \\ \underline{b} = \underline{T} \wedge \underline{N} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\underline{T}}{ds} = \kappa(s) \underline{N}(s) \\ \frac{d\underline{N}}{ds} = \tau(s) \underline{b}(s) - \kappa(s) \underline{T}(s) \\ \frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau(s) \underline{N}(s) \end{cases}$$

$$\text{dove } \kappa(s) = \left\| \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \right\| \quad \text{e } \tau(s) = \frac{\frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \wedge \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}}{\frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}}$$

(curvatura) (torsione)

Consideriamo una particella vincolata sulla
linea e soggetta alla forza di attrito
ed a un campo di forze generico $\underline{F}(\underline{r})$.
La reazione vincolare totale sia $\underline{R}$.

$$\underline{F} + \underline{\Phi} - \beta \underline{v} = m \underline{a}$$

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{k}) = \underline{F}(\underline{k}(s(t))) \rightarrow \text{Gruppo d. forze esterno}$$

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_n \underline{m} + \underline{\Phi}_b \underline{b} \rightarrow \text{teoria vincolare}$$

$$-\beta \underline{v} = -\beta \frac{d\underline{k}}{dt} = -\beta \frac{d\underline{k}}{ds} \frac{ds}{dt} \rightarrow \text{effetto viscoso}$$

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{k}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\underline{k}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 \underline{k}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\underline{k}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\left\{ \underline{F}(\underline{k}(s)) + \underline{\Phi}_n(s) \underline{m}(s) + \underline{\Phi}_b(s) \underline{b}(s) + \right. \\ \left. - \beta \frac{d\underline{k}}{ds}(s) \frac{ds}{dt} = m \left[\frac{d^2 \underline{k}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\underline{k}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} \right] \right\}$$

La precedente può essere proiettata sulla tangente mobile della curva ottenendo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
& \left(F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{t}(s) \right) \underline{t}(s) + \left(F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{m}(s) \right) \underline{m}(s) + \\
& + \left(F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{b}(s) \right) \underline{b}(s) + \Phi_m(s) \underline{m}(s) + \\
& + \Phi_b(s) \underline{b}(s) - \beta \underline{t}(s) \frac{dS}{dt} = \\
& = m k(s) \underline{m}(s) \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + m \underline{t}(s) \frac{d^2 S}{dt^2} \quad \text{de cui:}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{t}(s) - \beta \frac{dS}{dt} = m \frac{d^2 S}{dt^2} \\
F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{m}(s) + \Phi_m(s) = m k(s) \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \\
F(\underline{a}(s)) \cdot \underline{b}(s) + \Phi_b(s) = 0
\end{cases}$$

la prima è l'equazione pure in $s(t)$.
 le altre due formule forniscono le
 espressioni per le reazioni
 vincolari.

Se non vi è il campo di forze ⁵⁰
 cioè $\underline{F} = 0$ allora:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} + \beta \frac{ds}{dt} = 0 \\ S(0) = S_0 \\ \frac{ds}{dt}(0) = V_0 \end{cases} \quad \text{quindi:}$$

$$S(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$C_1 + C_2 = S_0$$

$$-\frac{\beta}{m} C_2 = V_0 \Rightarrow C_2 = -V_0 \frac{m}{\beta} \Rightarrow C_1 = V_0 \frac{m}{\beta} + S_0$$

$$S(t) = V_0 \frac{m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t} \right) + S_0 \quad \text{se } \beta \neq 0$$

$$\text{se } \beta = 0 \quad \frac{m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t} \right) \rightarrow \frac{\frac{t}{m} e^{-\frac{\beta}{m} t}}{\frac{1}{m}} \rightarrow t$$

$$S(t) = S_0 + V_0 t \quad \text{se } \beta = 0$$

Nota $S(t)$ si possono calcolare
 le reazioni vincolari con le formule
 precedenti.

Moto di una particella vincolata su una superficie

51

Consideriamo una particella di massa m vincolata su una superficie di equazioni parametriche $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$.

La particella è soggetta ad un campo di forze $\underline{F}(\underline{r}(u, v))$ e all'attrito $-\beta \underline{v}$

$$\underbrace{\underline{F}(\underline{r}(u, v))}_{\text{Camp. di forze}} + \underbrace{\underline{Q}(u, v) \underline{M}(u, v)}_{\text{Forza vincolare}} - \underbrace{\beta \underline{v}}_{\text{attrito}} = m \underline{a}$$

Sono incognite le relazioni $u(t)$ e $v(t)$ che definiscono la linea sulla superficie seguita dalla particella.

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

$$\underline{Q} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right) \frac{dv}{dt} \right] \frac{du}{dt} + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial v} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial R}{\partial v} \right) \frac{dv}{dt} \right] \frac{dv}{dt} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2} = \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2} = \\
&= \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + e_m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \\
&+ 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 2 f_m \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \\
&+ \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + g_m \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2}
\end{aligned}$$

Allora l'equazione del moto diventa:

$$\begin{aligned}
& \left(\underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{M} \right) \underline{M} + \left(\underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \\
& + \left(\underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \Phi(u,v) \underline{M} - \beta \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \\
& - \beta \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} = m \left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \right. \\
& + \left. \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dt^2} \right] \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \\
& + m \left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \\
& + \left[e \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2f \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \underline{M}
\end{aligned}$$

separando i termini in $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}, \underline{M}$

$$\underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{M} + \Phi(u,v) \underline{M} = e \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2f \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

da cui la relazione richiesta:

$$\Phi(u,v) = e \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2f \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - \underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{M}$$

La equazioni pure del moto:

58

$$F(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{du}{dt} = m \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dt^2} \right]$$

$$F(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \beta \frac{dv}{dt} = m \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 v}{dt^2} \right]$$

Le $F=0$ e $\beta=0$ si ottengono le eq della
geodesiche.

UNA PROPRIETA' DELLA CURVATURA MEDIA DI UNA SUPERFICIE

1

Consideriamo una superficie $R(u, v)$ in un dato sistema di riferimento ortogonale.

Ad essa si associano le 1° e le 2° forme fondamentali come noto:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \begin{cases} E = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial R}{\partial u} \\ F = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial R}{\partial v} \\ G = \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial R}{\partial v} \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} e = -\frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \cdot M \\ f = -\frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} \cdot M \\ g = -\frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} \cdot M \end{cases} \end{aligned}$$

dove
$$\underline{M}(u, v) = \frac{\frac{\partial R}{\partial u} \wedge \frac{\partial R}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial R}{\partial u} \wedge \frac{\partial R}{\partial v} \right\|} = \frac{\frac{\partial R}{\partial u} \wedge \frac{\partial R}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Consideriamo una deformazione finita della superficie di questo tipo:

$$\underline{R}'(u, v) = \underline{R}(u, v) + \varepsilon \underline{M}(u, v)$$

dove ε è un numero reale noto indipendente da u e v .

Vediamo come si trasformano gli
elementi della prima forma quadratica
sotto la deformazione indicata,

$\underline{x}'(u, v)$ ha la 1^a forma E', F', G' :

$$\begin{aligned} E' &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \right) = \\ &= E + 2\varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \varepsilon^2 \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} = \\ &= E - 2\varepsilon e + \varepsilon^2 \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F' &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \right) = \\ &= F + 2\varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \varepsilon^2 \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} = \\ &= F - 2\varepsilon f + \varepsilon^2 \frac{\partial \underline{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G' &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \right) = \\ &= G - 2\varepsilon g + \varepsilon^2 \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial v} \end{aligned}$$

Alle formele d. Weingarten:

3

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{M}}{\partial u} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \frac{\partial \underline{A}}{\partial u} + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \frac{\partial \underline{A}}{\partial v} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial v} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{\partial \underline{A}}{\partial u} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \frac{\partial \underline{A}}{\partial v} \end{cases}$$

(per esempio Bianchi vol. I. pag. 170)

Si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial u} = \frac{e^2 G - 2fFe + f^2 E}{EG - F^2} = \alpha(u, v)$$

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial v} = \frac{eGf - egF + fgE - f^2 F}{EG - F^2} = \gamma(u, v)$$

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial v} = \frac{f^2 G - 2g f F + g^2 E}{EG - F^2} = \beta(u, v)$$

da cui infine la formula completa
di trasformazione delle 1^o forme
quadretiche:

$$E' = E - 2\epsilon e + \epsilon^2 \frac{e^2 G - 2fFe + f^2 E}{EG - F^2}$$

$$F' = F - 2\epsilon f + \epsilon^2 \frac{eFG - (eg - f^2)F + fgE}{EG - F^2}$$

$$G' = G - 2\epsilon g + \epsilon^2 \frac{f^2 G - 2gFF + g^2 E}{EG - F^2}$$

Also or $E'G' - F'^2$

$$\begin{aligned} E'G' &= EG - 2\epsilon gE - 2\epsilon eG + 4\epsilon^2 eg + \\ &+ \epsilon^2 G\alpha + \epsilon^2 E\beta - 2\epsilon^3 g\alpha - 2\epsilon^3 e\beta + \\ &+ \epsilon^4 \alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'^2 &= F^2 + 4\epsilon^2 f^2 - 4\epsilon Ff + 2\epsilon^2 F\gamma - 4\epsilon^3 f\gamma + \\ &+ \epsilon^4 \gamma^2 \end{aligned}$$

de cui :

$$\begin{aligned}
 E'G' - F'^2 &= EG - F^2 - 2E(gE - 2Ff + eG) + \\
 &+ E^2(4eg - 4f^2 + Gd - 2F\gamma + Ef) + \\
 &+ E^3(4f\gamma - 2g\alpha - 2e\beta) + \\
 &+ E^4(\alpha\beta - \gamma^2) =
 \end{aligned}$$

$$= EG - F^2 + f(E)$$

Calcolo il limite:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{E'G' - F'^2} - \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$= \lim_{E \rightarrow 0} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{EG - F^2 + f(E)} - \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \lim_{E \rightarrow 0} \frac{f'(E)}{2\sqrt{EG - F^2 + f(E)}}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = -2(gE - 2Ff + eG)$$

Allora:

6

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{E'G' - F'^2} - \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = - \frac{gE - 2Ff + eG}{EG - F^2}$$

Ricordando che (vedi vol I pag 197):

$$M = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) = \frac{gE - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)}$$

e la curvatura media della superficie
ha anche:

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{E'G' - F'^2} - \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = -2M$$

Ricordando anche che $dS' = \sqrt{E'G' - F'^2} du dv$
si ha anche:

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{E} \frac{dS' - dS}{dS} = -2M$$

6. Si vuole dimostrare anche il
 seguente fatto: se una superficie
di contorno chiuso ha area
minima allora la sua curvatura
media è nulla.

Questo può essere dimostrato anche
 vedendo il calcolo delle variazioni.
 Sia data la superficie $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases}$

Allora le forme fondamentali sono:

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \quad e = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} / \sqrt{EG - F^2}$$

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \quad f = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} / \sqrt{EG - F^2}$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \quad g = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} / \sqrt{EG - F^2}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

l'equazione di Eulero-Lagrange associata
al funzionale:

$$A(z(x,y)) = \iint_D \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}_f dx dy$$

è seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} = 0$$

cioè svolgendo i conti:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

che può essere scritta:

$eG - 2Ff + Eg = 0$ cioè $M=0$ e
quindi i due raggi di curvatura
normale sono uno opposto all'altro.

Dalle formule di pag. 4 di Caputo
la prima forma quadratica della sup iniziale
e quella della sup deformata s.

avremo i limiti:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E'(\varepsilon) - E}{\varepsilon} = -2c$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F'(\varepsilon) - F}{\varepsilon} = -2f$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G'(\varepsilon) - G}{\varepsilon} = -2g$$

Tal formul. rappresenta relazioni
tra gli element. della 1° e 2° forma
quadratica della superficie -

Le prime formule di pag. 5 si può
descrivere con le seguenti convenzioni:

$$\Delta = EG - F^2$$

$$\Delta' = E'G' - F'^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{EG - 2FF + EG}{2(EG - F^2)} \end{array} \right.$$

curvatura
media.

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{array} \right.$$

curvatura
gaussiana

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 1 - 4EM + 2E^2(K + 2M^2) + \\ - 4E^3MK + E^4K^2$$

Le precedenti si dimostrano semplicemente
svolgendo tutti i conti.

UNA PROPRIETÀ DELLA CURVATURA GAUSSIANA DI UNA SUPERFICIE

1

Consideriamo una superficie $\mathbf{r}(u, v)$ con
escrete le forme quadratiche 1° e 2°
 (E, F, G) e (e, f, g) - Il vettore
normale ha
$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Definiamo l'immagine sferica della
superficie: costruiamo una sfera di
raggio unitario con centro all'origine degli
assi e descriviamo una applicazione fra
i punti della superficie e quelli della
sfera; per ogni punto della sup
costruiamo il vettore $\mathbf{n}$ e riportiamolo
(spostandolo parallelamente a se stesso)
con i vertici nel centro della sfera o
sulla sfera stessa; il punto intercettato
sulla sfera è il corrispondente di
quello iniziale sulla superficie.

La parametrizzazione che si ottiene
sullo sfere si chiama immagine sferica
della superficie e l'equazione è
 $h(u, v)$.

La prima forma quadratica dell'
immagine sferica è data da:

$$I = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial u}$$

$$II = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v}$$

$$III = \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial v}$$

Tal. espressioni sono scrivibili in funzione
delle 1° e delle 2° forme fondamentali
per mezzo delle formule di Weingarten:

$$\frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{e^2 G - 2efF + f^2 E}{EG - F^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{eGf - egF + fgE - f^2 F}{EG - F^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{f^2 G - 2g f F + g^2 E}{EG - F^2}$$

da cui, ricordando che:

$$M = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(Eg - F^2)}$$

$$K = \frac{g - f^2}{Eg - F^2}$$

Le altre:

$$l = 2Me - KE$$

$$m = 2Mf - KF$$

$$n = 2Mg - KG$$

Talvolta
sono detti
elementi
della 3°
forma della
superficie

Si scrive per brevità: $KI - 2MII + III = 0$

Il determinante della terza forma:

$$ln - m^2 = (2Me - KE)(2Mg - KG) + \\ - (2Mf - KF)^2 =$$

$$= 4M^2 eg + K^2 EG - 2MKEG +$$

$$- 2MKeg - (4M^2 F^2 + K^2 F^2 +$$

$$- 4MKFF) =$$

$$= 4M^2(g - F^2) + K^2(EG - F^2) +$$

$$- 2MK(EG - 2FF + eg) =$$

$$= 4M^2 K(EG - F^2) + K^2(EG - F^2) +$$

$$- 2M^2 K 2(EG - F^2) =$$

$$= K^2(EG - F^2) \Rightarrow$$

$$K = \frac{\sqrt{en - m^2}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

curvatura
gaussiana
in funzione
della I e
della III
forma.

Ricordando che $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$

si può scrivere:

$$K = \frac{dS_{i.s.}}{dS}$$

Cioè la curvatura gaussiana è
il rapporto tra l'area in finitessime
dell'immagine sferica (i.s.) e
la corrispondente area sulla
superficie.

CALCOLO DELLA CURVATURA GEODETICA PER LE LINEE $v = \text{costante}$. (CASO 2D)

Le linee h_2 parametrizzate in $u=t$, $v=\text{cost}$
Si definisce il parametro naturale sulle
curve mediante la relazione fornita
dalla lunghezza di una curva su d. una
superficie.

$$s = \int_0^u \sqrt{E} du$$

da cui $\frac{ds}{du} = \sqrt{E}$ e $\frac{d^2s}{du^2} = \frac{d\sqrt{E}}{du} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{dE}{du}$

le derivate della funzione inversa $u=u(s)$ sono:

$$\boxed{\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}} \Rightarrow \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{E}} = \left(\frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \frac{du}{ds} =$$

$$(1) \quad = \left(\frac{d}{du} E^{-1/2} \right) \frac{1}{\sqrt{E}} = -\frac{1}{2} E^{-3/2} \frac{dE}{du} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{E^2} \frac{dE}{du}} \quad (2)$$

Da pag. 42 abbiamo la def. di "geodetic
curvature": $K_g^2 = K_{g1} g_{11} K_{g1} =$

$$= (K_{g1} \ K_{g1}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{g1} \\ K_{g2} \end{pmatrix} =$$

$$= K_{g1}^2 E + 2 K_{g1} K_{g2} F + K_{g2}^2 G \quad (3)$$

dove $K_{gi} = \left\{ \begin{matrix} J^K \\ i \end{matrix} \right\} \frac{du_k}{ds} \frac{du_j}{ds} + \frac{d^2 u_i}{ds^2}$

nel nostro caso $u_1 = u = t$ e $u_2 = v = \text{cost.}$ quindi da (1) e (2):

$$\left\{ K_{g1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E^2} \frac{dE}{du} \right.$$

$$\left. K_{g2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \right.$$

così:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{g1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{E} - \frac{1}{2} \frac{1}{E^2} E_u \\ K_{g2} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{E} \end{aligned} \right.$$

Semplifico K_{g1} :

$$\boxed{K_{g1}} = \frac{GE_u + FE_v - 2FE_u}{2(E^2 - F^2)} \cdot \frac{1}{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E^2} E_u =$$

$$= \frac{EE_u + FEE_v - 2FE_u - (E^2 - F^2)E_u}{2E^2(E^2 - F^2)} =$$

$$= \frac{F(EE_v - 2FE_u + FE_u)}{2E^2(E^2 - F^2)} = \boxed{-\frac{F}{E^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Sostituire ora nella formula (3) ed
ottenere:

$$K_g^2 = \frac{F^2}{E^4} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}^2 E + 2 \left(-\frac{F}{E^3} \right) \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{F}{E} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{E^2} G =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}^2 \left(\frac{F^2}{E^3} - \frac{2F^2}{E^3} + \frac{G}{E^2} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}^2 \frac{EG - F^2}{E^3} \Rightarrow$$

$$K_{g_{v=\text{const}}} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E \sqrt{E}} \quad (4)$$

(Vedav
Raman
vol. I pag 270)

Analogoente per la linea $u=\text{const}$:

$$\begin{matrix} u=\text{const.} & v=t \\ (u_1) & (u_2) \end{matrix} \Rightarrow s = \int_0^v \sqrt{G} \, dv$$

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{G} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dv^2} = \frac{d}{dv} \sqrt{G} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{dG}{dv}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Rightarrow \frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \right) \cdot \frac{dv}{ds} =$$

$$= \frac{d}{dv} (G^{-1/2}) \frac{1}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{2} G^{-3/2} \cdot G^{-1/2} \frac{dG}{dv} = -\frac{1}{2} \frac{1}{G^2} \frac{dG}{dv}$$

In Tale caso :

$$\begin{cases} K_{g1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}} & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{G} \\ K_{g2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}} & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix} + -\frac{1}{2} \frac{1}{G^2} \frac{dG}{dv} = \\ = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{G} - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G^2} \end{cases}$$

ma

$$\boxed{K_{g2}} = \frac{E G_v + F G_v - 2 F F_v}{2(E G - F^2)} \cdot \frac{1}{G} - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G^2} =$$

$$= \frac{E G G_v + F G G_v - 2 F G F_v - (E G - F^2) G_v}{2 G^2 (E G - F^2)} =$$

$$= \frac{F (G G_v - 2 G F_v + F G_v)}{2 G^2 (E G - F^2)} = \boxed{-\frac{F}{G^2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}}$$

Uso ancora la formula (3) ed ottengo nuovamente:

$$\begin{aligned} K_g^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}^2 \frac{1}{G^2} E + 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{G} \left(-\frac{F}{G^2} \right) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} F + \\ &+ \frac{F^2}{G^4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}^2 \left[\frac{E}{G^2} - \frac{2 F^2}{G^3} + \frac{F^2}{G^3} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}^2 \frac{E G - F^2}{G^3} \Rightarrow \boxed{K_{g_{\text{ducast}}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{E G - F^2}}{G \sqrt{G}}} \end{aligned}$$

Espressioni per la curvatura gaussiana di una superficie.



E' noto che (vedi pag. 38) la curvatura gaussiana si esprime come:

$$K = \frac{(12, 12)}{EG - F^2} \quad (1) \quad \underline{1^{\circ} \text{ forma}}$$

Si ha che gli unici simboli (...) non nulli sono $(12, 12) = (21, 21) = -(12, 21) = -(21, 12)$ (vedere Bianchi, cap. II, vol. I)

Quindi usando la relazione:

$$\{r_m, s_t\} = g^{mj} (r_j, s_t) \quad \text{si ottiene:}$$

$$\{12, 12\} = g^{21} (11, 12) + g^{22} (12, 12)$$

$$\text{ma } (11, 12) = 0 \Rightarrow (12, 12) = \frac{\{12, 12\}}{g^{22}}$$

$$\text{ma } g^{22} = (g_{22})^{-1} = \frac{E}{EG - F^2} \Rightarrow K = \frac{(12, 12)}{EG - F^2} = \frac{\{12, 12\}}{E}$$

$$K = \frac{\{12, 12\}}{E} \quad (2) \quad \underline{2^{\circ} \text{ forma}}$$

ma

$$\{12, 12\} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2 - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 =$$

$$= \frac{2}{\partial V} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \{12\}}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) +$$

$$+ 2 \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right)$$

ricordo che $\left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u_k} = \frac{2}{\partial u_k} \log \sqrt{g} \Rightarrow$
 $(g = EG \cdot F^2)$

$$\{12, 12\} = \frac{2}{\partial V} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{2}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{2}{\partial u} \log \sqrt{g} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{2}{\partial u} \log \sqrt{g} + 2 \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right)$$

$$K = \frac{\{12, 12\}}{E} = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{E} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{E} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial V} + \frac{2}{E} \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right)$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{1}{E} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{E} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} + \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{E} \right) - \frac{1}{E} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \frac{1}{E} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{E} \right) \right\} +$$

$$- \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{E} \right) + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{E} \right) +$$

$$+ \frac{2}{E} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\sqrt{g}}{E} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\sqrt{g}}{E} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{E^2} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial E}{\partial v} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial E}{\partial u} + 2E \left(\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right) \right] \quad (3)$$

$$\text{ma (a)} \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2 \left[\begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2 g_{1\kappa} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= 2 E \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 F \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial E}{\partial u} = 2 \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2 g_{1\kappa} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= 2 E \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 F \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

Sostituendo (a) e (b) nella (3) si vede che la seconda quadra è nulla.

quindi:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\sqrt{g}}{E} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\sqrt{g}}{E} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \right\} \quad (4)$$

che si può anche scrivere:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \right\} \quad (5)$$

lo stesso identico calcolo può essere fatto
a partire da $K = \frac{(21, 21)}{Eg - F^2}$; si ha

$$\{21, 21\} = g^{11} (21, 21) + g^{12} (22, 21) \text{ ma } (22, 21) = 0$$

$$\Rightarrow (21, 21) = \frac{\{21, 21\}}{g^{11}} \text{ che è come la}$$

formula (2) con $1 \leftrightarrow 2$. Quindi nelle (5) si
può invertire $1 \leftrightarrow 2$ ottenendo la (6)

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\sqrt{g}}{G} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\sqrt{g}}{G} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \right\} \quad (6)$$

Formula di Liouville (È una formula
simmetrica tra le
due precedenti)

Partiamo dalla (4) e ricordiamo che:

$$K_{gv} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{EG-F^2}}{F\sqrt{E}} ; K_{gu} = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}$$

Intanto sostituisco la prima:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{E} K_{gv} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\sqrt{g}}{E} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (7)$$

Plücker tra le linee coordinate mi scrive:

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

e derivando il coseno rispetto a v si ottiene:

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial v} = -\sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \quad \text{ma anche:}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \cos \omega = \frac{\partial}{\partial v} \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{F\sqrt{EG} - F \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v G + E G_v)}{EG}$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{F\sqrt{EG} - F \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v G + E G_v)}{EG}$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E_G - F^2}} \left[F_v - \frac{F E_v G}{2 E G} - \frac{F E G_v}{2 E G} \right]$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E_G - F^2}} \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{F}{2E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \right]$$

Passando ai simboli di Christoffel si ha:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\sqrt{g}}{G} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\sqrt{g}}{E} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{cioè:}$$

$$-\frac{\sqrt{g}}{E} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{G} K_{gu}$$

Allora infine:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} K_{gv}) + \frac{\partial}{\partial u} \left[\sqrt{E} K_{gu} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} K_{gv}) + \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G} K_{gu}) \right\} \quad (*)$$

Formula di Liouville per
la curvatura Gaussiana.

Se la linea sono ortogonali in hz
 $\omega = \text{costante}$ e quindi:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} K_{gv}) + \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{g} K_{gu}) \right\}$$

Valida in $F=0$.

$$\text{Qua } \omega = \pi/2 \rightarrow F = \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-E E_v}{2 E g} = - \frac{E_v}{2 g}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{-G G_u}{2 E g} = - \frac{G_u}{2 E}$$

$$K_{gv} = - \frac{E_v}{2 g} \frac{\sqrt{E g}}{E \sqrt{E}} = - \frac{E_v}{E} \frac{1}{2 \sqrt{g}}$$

$$K_{gu} = - \frac{G_u}{2 E} \frac{\sqrt{E g}}{G \sqrt{g}} = - \frac{G_u}{G} \frac{1}{2 \sqrt{E}}$$

Segue:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(- \frac{E_v}{\sqrt{E}} \frac{1}{2 \sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(- \frac{G_u}{\sqrt{g}} \frac{1}{2 \sqrt{E}} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$K = - \frac{1}{\sqrt{E g}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] \quad (9)$$

Valida in $F=0$



la sfars: Suprafata a curatură constantă pozitivă

la reprezentare parametrică:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$E = r^2$$

$$F = 2r^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + r^2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow$$
$$F = 0$$

$$G = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \Rightarrow$$

$$G = r^2 \sin^2 \theta$$

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Essendo $F=0$ vale la (9) ed inoltre $E = \text{costante}$ quindi:

$$K = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \right] =$$
$$= - \frac{1}{E\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

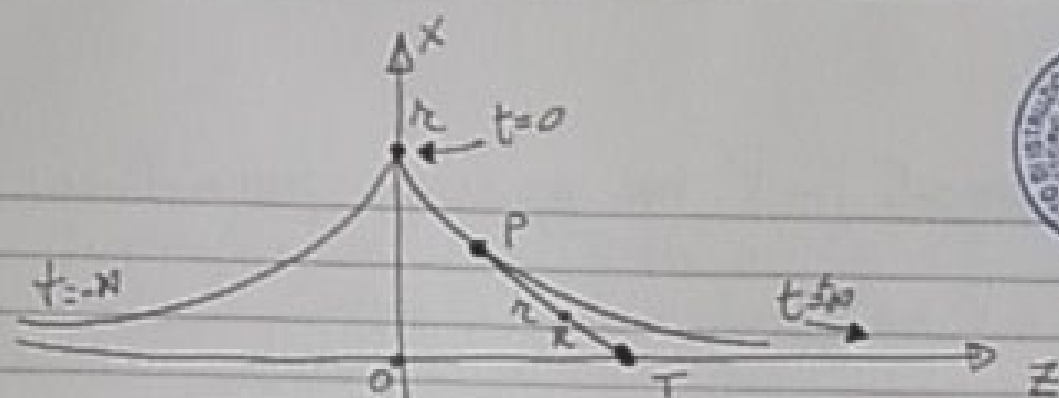
Per la sfera $u = \theta \Rightarrow$

$$K = - \frac{1}{\lambda^2 \lambda \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\lambda \sin \theta) =$$
$$= - \frac{1}{\lambda^2 \cdot \lambda \sin \theta} \lambda (-\sin \theta) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$K = + \frac{1}{\lambda^2}$$

La superficie di Beltrami o pseudosfera a curvatura costante negativa

Per definire la superficie di Beltrami si bene introduce una curva che si chiama trattrice.



Si tratta di una curva per cui il tratto di tangente PT tra la curva e l'asse z è sempre costante pari ad $r=1$. Poiché la tangente è verticale per $z=0$.

Una parametrizzazione $\bar{c}$ data da:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{sech} t \\ z(t) = t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = t - \tanh t \end{cases}$$

Come si verifica subito:

$$P \rightarrow (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = (D \operatorname{sech} t, 1 - D \tanh t)$$

$$\text{ma } D \operatorname{sech} t = -\tanh t \operatorname{sech} t$$

$$D \tanh t = 1 - \tanh^2 t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = (-\tanh t \operatorname{sech} t, \tanh^2 t)$$

La retta Tangente in P ha equazioni parametriche:

$$R = P + \alpha \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} R_x = \operatorname{sech} t + -\alpha \tanh t \operatorname{sech} t \\ R_y = t - \tanh t + \alpha \tanh^2 t \end{cases}$$

Se $R_x = 0$ siamo in T:

$$0 = \operatorname{sech} t - \alpha_T \tanh t \operatorname{sech} t$$

$$\alpha_T = \frac{1}{\tanh t} = \coth t$$

Legue R_y :

$$\begin{aligned} R_y &= t - \tanh t + \coth t \tanh^2 t = \\ &= t - \tanh t + \tanh t = t \end{aligned}$$

Allora: $P(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$
 $T(0, t)$

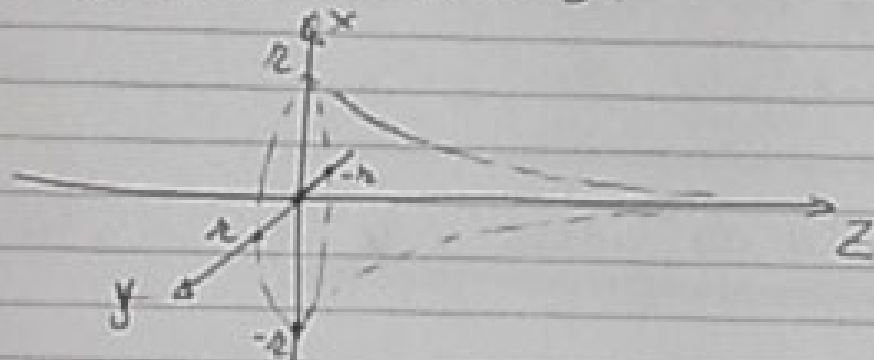
$$\overline{\Phi_T}^2 = \operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t =$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 t} + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \frac{\cosh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\Phi_T} = 1 \quad \forall t}$$



La superficie di Bolzano è la sup.
di rotazione ottenuta facendo ruotare la
retta attorno all'asse z .



La rappresentazione parametrica è quindi:

$$\begin{cases} x(u,v) = l \operatorname{sech} u \cos v \\ y(u,v) = l \operatorname{sech} u \sin v \\ z(u,v) = l(u - \tanh u) \end{cases}$$

Calcolo la 1ª forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = -l \tanh u \operatorname{sech} u \cos v & \frac{\partial x}{\partial v} = -l \operatorname{sech} u \sin v \\ \frac{\partial y}{\partial u} = -l \tanh u \operatorname{sech} u \sin v & \frac{\partial y}{\partial v} = l \operatorname{sech} u \cos v \\ \frac{\partial z}{\partial u} = l(1 - \tanh^2 u) & \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = l^2 (\tanh^2 u \operatorname{sech}^2 u + \tanh^4 u) =$$

$$= l^2 \tanh^2 u (\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u) =$$

$$= l^2 \tanh^2 u \left(\frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{\sinh^2 u}{\cosh^2 u} \right) = l^2 \tanh^2 u.$$



$$F = 0$$

$$G = c^2 \operatorname{sech}^2 u \sin^2 v + c^2 \operatorname{sech}^2 u \cos^2 v = \\ = c^2 \operatorname{sech}^2 u$$

$$ds^2 = c^2 \tanh^2 u \, du^2 + c^2 \operatorname{sech}^2 u \, dv^2$$

Esempio un cambio di variabili sulla
variabile u : $u = u(x)$ e $x = x(u)$.

$$E' = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \\ = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$F' = F = 0$$

$$G' = G(u(x))$$

Impongo la trasformazione in modo tale che

$E' = \lambda^2$ (diventa cioè costante); quindi:

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 \tanh^2 u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \tanh u$$

$$X(u) = \int \tanh u \, du =$$

$$= \int \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \, du = \int \frac{\sinh u}{\cosh u} \, du$$

pongo $K = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Rightarrow \frac{dK}{du} = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

$$X(u) = \int \frac{\frac{dK}{du}}{K} \, du = \int \frac{dK}{K} = \ln[K(u)] = \\ = \ln(\cosh u)$$

$$X(u) = \ln(\cosh u) \rightarrow e^X = \cosh u$$

Con tale trasformazione si ottiene:

$$E' = r^2$$

$$F' = 0$$

$$G' = e^{2x} \sinh^2 u = r^2 \frac{1}{\cosh^2 u} = r^2 e^{-2x}$$

$$ds^2 = r^2 (dX^2 + e^{-2X} dv^2)$$

la curvatura Gaussiana è quindi:

$$K = - \frac{1}{E\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} =$$

$$= - \frac{1}{e^2 e^{-x}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e e^{-x}) =$$

$$= - \frac{1}{e^2 e^{-x}} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x}) =$$

$$= - \frac{1}{e^2 e^{-x}} \frac{\partial}{\partial x} (-e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{e^2 e^{-x}} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{e^2 e^{-x}} (-e^{-x}) = \boxed{-\frac{1}{e^2}}$$

Curvatura costante negativa

A quali punti siamo

$$E = e^2; F = 0; G = e^2 e^{-2x}$$

(0,5 0,5) (0,5 0,5) (0,5 0,5)



Se infine scegliamo il cambio di variabili
 $x = v$ $y = e^x$

Si ottiene:

$$E'(x, y) = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial v} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial v} = \eta^2 e^{-2x} = \frac{\eta^2}{y^2}$$

$$F' = 0$$

$$G'(x, y) = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 = \eta^2 \frac{1}{y^2}$$

↓

$$ds^2 = \eta^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Questa si chiama metrica di Klein
sulle pseudosfere.