

INTRODUZIONE AL TRASPORTO

1

PARALLELO

Aprile 1997

Vediamo intuitivamente come si esprimono i vettori Tangenti ed il versore normale in un punto della superficie sulle base formata da vettori Tangenti e versore normale in un altro punto.

Sia $\underline{R} = \underline{R}(\underline{u}) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la forma parametrica della superficie; $\frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k}$ i vettori Tangenti per ogni $k = 1, \dots, n$; $\underline{n}$ il versore normale. Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due punti sulla superficie. Allora si possono costruire gli sviluppi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_k}(\underline{w}) = \alpha_{ki} \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_i}(\underline{v}) + \alpha_k \underline{n}(\underline{v}) \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{n}(\underline{w}) = \beta_i \frac{\partial \underline{R}}{\partial u_i}(\underline{v}) + \beta \underline{n}(\underline{v}) \end{array} \right. \quad [2]$$

(ovunque si usano le regole della somma
semplice anche ripetute)

Li potremo allora determinare i coefficienti della relazione

$$[1] \quad \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_j}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_j}(\underline{v}) = \alpha_{ki} g_{ij}(\underline{v})$$

Moltiplichiamo per $g_{jp}^{-1}(\underline{v})$ e sommiamo su j

otteniamo

$$\frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_j}(\underline{v}) g_{jp}^{-1}(\underline{v}) = \alpha_{ki} g_{ij}(\underline{v}) g_{jp}^{-1}(\underline{v})$$

$$\boxed{\alpha_{kp} = g_{jp}^{-1}(\underline{v}) \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_k}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_j}(\underline{v})}$$

$$[1] \cdot \underline{m}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \underline{m}(\underline{v}) = \alpha_k \underline{m}(\underline{v}) \underline{m}(\underline{v}) \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\partial \underline{\lambda}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \underline{m}(\underline{v})}$$

passando alla seconda otteniamo:

3

$$[2] \quad \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \cdot \underline{m}(\underline{w}) = \beta_i \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_i}(\underline{v}) \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \underline{m}(\underline{w}) = g_{ij}(\underline{v}) \beta_i$$

moltiplicando per $g_{jp}^{-1}(\underline{v})$ e sommando su j :

$$g_{jp}^{-1}(\underline{v}) \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \underline{m}(\underline{w}) = g_{jp}^{-1}(\underline{v}) g_{ij}(\underline{v}) \beta_i$$

$$\beta_i = g_{ip}^{-1}(\underline{v}) \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \cdot \underline{m}(\underline{w})$$

$$[2] \cdot \underline{m}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\underline{m}(\underline{w}) \underline{m}(\underline{v}) = \beta \underline{m}(\underline{v}) \underline{m}(\underline{v}) \Rightarrow$$

$$\beta = \underline{m}(\underline{w}) \cdot \underline{m}(\underline{v})$$

Allora ricapitolando i risultati:

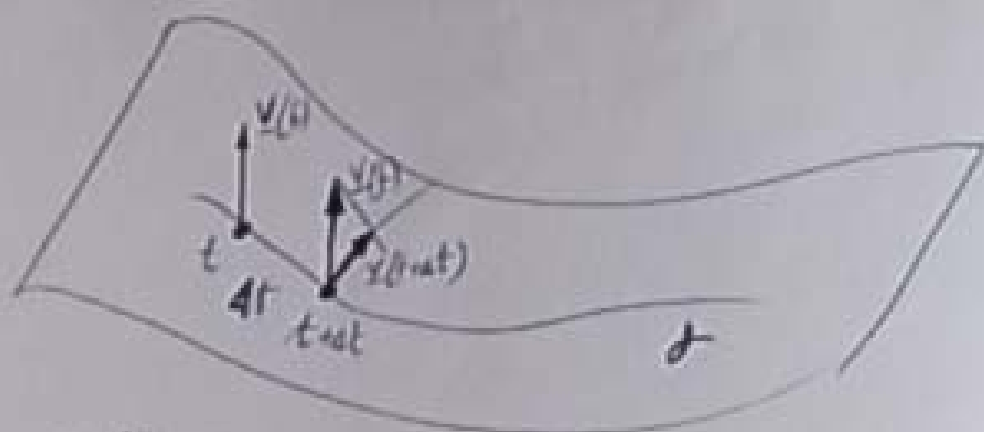
$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_k}(\underline{w}) = & g_{J_A}^{-1}(\underline{v}) \left(\frac{\partial \underline{L}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \right) \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_i}(\underline{v}) + \\ & + \left(\frac{\partial \underline{L}}{\partial u_k}(\underline{w}) \cdot \underline{m}(\underline{v}) \right) \underline{m}(\underline{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{m}(\underline{w}) = & g_{J_A}^{-1}(\underline{v}) \left(\frac{\partial \underline{L}}{\partial u_j}(\underline{v}) \cdot \underline{m}(\underline{w}) \right) \frac{\partial \underline{L}}{\partial u_i}(\underline{v}) + \\ & + \left(\underline{m}(\underline{w}) \cdot \underline{m}(\underline{v}) \right) \underline{m}(\underline{v}) \end{aligned}$$

Fatto questo possiamo definire più agevolmente⁵
il concetto di trasporto parallelo:

Consideriamo una linea fissata una
volta per tutte sulla superficie. In un
suo punto prendiamo un qualsiasi vettore
Tangente alla superficie e "trasportiamolo
parallelamente" nel seguente modo:

La curva sia data da: $\underline{u} = \underline{u}(t)$
dove $\underline{u}$ è il vettore dei parametri
della superficie. Il vettore sia $\underline{v}(t)$
nel punto t ; costruiamo $\underline{v}(t+\Delta t)$
nel punto $t+\Delta t$. Nel punto $t+\Delta t$
si può riportare il vettore $\underline{v}(t)$: in
generale se $\underline{v}(t)$ è tangente alla superficie
in t non lo sarà anche in $t+\Delta t$.
Allora costruiamo $\underline{v}(t+\Delta t)$ come
proiezione di $\underline{v}(t)$ sul piano tangente
in $t+\Delta t$.



$\underline{v}(t)$ Tangente in t

$\underline{v}(t)$ non tangente in $t+dt$ in generale

$\underline{v}(t+dt)$ tangente in t per di contro
come proiezione sul piano tangente.

In ogni punto lo spazio tangente ha una
base locale formata dai vettori $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}$
calcolati nel punto in questione.

Possiamo studiare come evolvono i
coefficienti del vettore trasportato parallelamente
sulla base descritta sopra.

$$\underline{v}(t) = v_i(t) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t)$$

$$\underline{v}(t+dt) = v_i(t+dt) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+dt)$$

Per la proiezione di $\underline{v}(t)$ sul piano
 Tangente in $t+\Delta t$ significa:

$$\begin{aligned}
 \underline{v}(t+\Delta t) &= \left[\begin{array}{c} \text{Componente di } \underline{v}(t) \\ \text{lungo } \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+\Delta t) \end{array} \right] \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+\Delta t) = \\
 &= v_j(t) \left[\begin{array}{c} \text{Componente di } \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}(t) \\ \text{lungo } \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+\Delta t) \end{array} \right] \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+\Delta t)
 \end{aligned}$$

Per quanto visto all'inizio si ha:

$$\underline{v}(t+\Delta t) = v_j(t) g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}(t) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_p}(t+\Delta t) \right) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}(t+\Delta t)$$

Allora in componenti

$$v_i(t+\Delta t) = v_j(t) g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}(t) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_p}(t+\Delta t)$$

oppure:

$$\delta_{ij} v_j(t+\Delta t) = v_j(t) g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}(t) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_p}(t+\Delta t)$$

Sottraendo ad entrambi i membri $\delta_{ij} V_j(t)$ e dividendo per Δt si ha:

$$\delta_{ij} \frac{V_j(t+\Delta t) - V_j(t)}{\Delta t} = V_j(t) \frac{g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_j}(t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_p}(t+\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

da cui:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = V_j(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_j}(t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_p}(t+\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t} =$$

$$= V_j(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta t} g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_j}(t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_p}(t+\Delta t) =$$

$$= V_j(t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_j}(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta t} g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \Delta}{\partial u_p}(t+\Delta t)$$

Bisogna quindi calcolare la derivata indicata:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t} \frac{\partial \Delta}{\partial u_p}(t+\Delta t) = \frac{\partial \Delta}{\partial u_p \partial u_k} \frac{du_k(t+\Delta t)}{d\Delta t}$$

$$g_{ij} g_{jp}^{-1} = \delta_{ip} \Rightarrow g_{ij} g_{jp}^{-1} + g_{ij} (g_{jp}^{-1})' = 0 \quad 9$$

dove l'opice indica la derivata rispetto a Δt ; allora:

$$g_{ki}^{-1} g_{ij} g_{jp}^{-1} + \delta_{kj} (g_{jp}^{-1})' = 0$$

$$(g_{kp}^{-1})' = -g_{ki}^{-1} g_{ij} g_{jp}^{-1}$$

oppure cambiando gli indici:

$$(g_{pi}^{-1})' = -g_{pj}^{-1} g_{jk} g_{ki}^{-1}$$

Allora riavendo i risultati:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t} g_{pn}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_p}(t+\Delta t) =$$

$$= -g_{pn}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial g_{nk}}{\partial u_s}(t+\Delta t) \frac{du_s(t+\Delta t)}{d\Delta t} g_{ki}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_p}(t+\Delta t)$$

$$+ g_{pi}^{-1}(t+\Delta t) \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_p \partial u_n} \frac{du_n(t+\Delta t)}{d\Delta t}$$

Eseguendo il limite si ha:

10

$$\frac{d\tilde{r}_i}{dt} = \tilde{J}_J \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u_J} \left[-g_{ph}^{-1} \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_S} \frac{du_S}{dt} g_{ki}^{-1} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u_p} + \right. \\ \left. + g_{pi}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial u_p \partial u_k} \frac{du_k}{dt} \right] =$$

$$= \tilde{J}_J \left[-g_{JP} g_{ph}^{-1} \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_S} g_{ki}^{-1} \frac{du_S}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u_J} g_{ki}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial u_k \partial u_S} \frac{du_S}{dt} \right] =$$

$$= \tilde{J}_J \left[-g_{JP} g_{ph}^{-1} \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_S} g_{ki}^{-1} \frac{du_S}{dt} + \right. \\ \left. + g_{ki}^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{JS}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kS}}{\partial u_J} - \frac{\partial g_{KS}}{\partial u_J} \right) \frac{du_S}{dt} \right] =$$

$$= \tilde{J}_J \left[- \frac{\partial g_{JS}}{\partial u_S} g_{ki}^{-1} \frac{du_S}{dt} + \frac{1}{2} g_{ki}^{-1} \frac{\partial g_{JS}}{\partial u_k} \frac{du_S}{dt} + \right. \\ \left. + g_{ki}^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kS}}{\partial u_J} \frac{du_S}{dt} - \frac{1}{2} g_{ki}^{-1} \frac{\partial g_{KS}}{\partial u_J} \frac{du_S}{dt} \right] =$$

$$= \tilde{J}_J \frac{du_S}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{JS}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{KS}}{\partial u_J} - \frac{\partial g_{Jk}}{\partial u_S} \right) g_{ki}^{-1}$$

ed infine quindi:

$$\frac{dv_i}{dt} = -v_j \frac{du_j}{dt} \begin{Bmatrix} j \\ i \end{Bmatrix}$$

Quindi i simboli di Christoffel controllano completamente il concetto di trasporto parallelo sulla superficie. Il trasporto parallelo permette di confrontare vettori in spazi tangenti differenti: questo permette di chiamare il coefficiente di Christoffel coefficiente di curvatura. Le equazioni differenziali sopra riportate generano il trasporto parallelo a partire da un vettore in un dato punto della linea.

Esse come equazioni differenziali dimostrano la possibilità del trasporto e l'unicità del risultato. Dimostrano che il trasporto parallelo conserva le lunghezze e gli angoli.

a tale scopo consideriamo due vettori
trasportati parallelamente lungo la curva
 $\underline{R}$ e $\underline{W}$; le componenti nella base
canonica dello spaz. tangente obediscono
alle equazioni ormai note:

$$\begin{cases} \frac{dR_i}{dt} = -R_j \frac{du_j}{dt} \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} \\ \frac{dW_i}{dt} = -W_j \frac{du_j}{dt} \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

Il prodotto scalare

$$\underline{R} \cdot \underline{W} = \left(R_i \frac{\partial x^i}{\partial u_j} \right) \cdot \left(W_j \frac{\partial x^j}{\partial u_i} \right) = g_{ij} R_i W_j$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g_{ij} R_i W_j) &= \\ &= \frac{dg_{ij}}{dt} R_i W_j + g_{ij} \frac{dR_i}{dt} W_j + g_{ij} R_i \frac{dW_j}{dt} = \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r} \frac{du_r}{dt} R_i W_j - g_{ij} R_k \frac{du_r}{dt} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} W_j - g_{ij} R_i W_k \frac{du_r}{dt} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

ma $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_P} = \begin{bmatrix} i & P \\ & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & j \\ i & \end{bmatrix}$ quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g_{ij} R_i W_j) &= \\ &= \begin{bmatrix} i & P \\ & j \end{bmatrix} \frac{du_P}{dt} R_i W_j + \begin{bmatrix} P & j \\ i & \end{bmatrix} \frac{du_P}{dt} R_i W_j + \\ &- \begin{bmatrix} i & P \\ & j \end{bmatrix} \frac{du_P}{dt} R_i W_j - \begin{bmatrix} P & j \\ i & \end{bmatrix} \frac{du_P}{dt} R_i W_j = 0 \end{aligned}$$

ponendo $\underline{R} = \underline{W}$ si ha la verifica della
conservazione delle lunghezze - la conserv.
dei prodotti scalari e delle lunghezze
compreso la conservazione degli angoli
tra i due vettori spostati parallelamente.

Auto parallelismo delle geodetiche

Sopponiamo che una curva γ geodetica γ soddisfi le relazioni differenziali

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0 \quad (*)$$

Il vettore tangente alla curva è

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt} \quad \text{quindi}$$

ha componenti nello spazio tangente $\left\{ \frac{du_k}{dt} \right\}$;
posto $R_k = \frac{du_k}{dt}$ si ha dalle $(*)$

$$\frac{dR_i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i \end{matrix} \right\} R_j \frac{du_k}{dt} = 0$$

il che significa: il vettore tangente ad una curva geodetica γ è il trasportato per parallelismo lungo la geodetica stessa.

CALCOLO TENSORIALE SU VARIETA'

(1)

Aprile 99

Sia data una superficie $n-1$ dimensionale
in $\mathbb{R}^m$ $\underline{z} = \underline{z}(\underline{u}) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, detta varietà
Riemanniana. Siano $\frac{\partial \underline{z}}{\partial u_k}$ i vettori tangenti
 $k=1, \dots, n-1$; $\underline{n}$ il vettore normale (si
suppone che esso esista in ogni punto
della superficie cioè $\forall \underline{u}$)

In ogni punto si può costruire il piano
tangente il quale genera uno spazio
vettoriale $n-1$ dimensionale con una base
naturale $\left\{ \frac{\partial \underline{z}}{\partial u_k} \quad k=1, \dots, n-1 \right\}$. Essa viene
detta 'base tangente'; oltre a questa si
conviene un'altra base con la 'fetta'

$$\left\{ g_{ij}^{-1} \frac{\partial \underline{z}}{\partial u_i} \quad i, j=1, \dots, n-1 \right\} \quad \text{dove } g_{ij} = \frac{\partial \underline{z}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{z}}{\partial u_j} \quad \text{e}$$

dove viene usata la convenzione di sommare
sugli indici ripetuti. (L'altra base
è detta 'base cotangente' o 'base reciproca'.

Ritrovando

posto

$$g_{ij} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_j}$$

si ha:

$$\left\{ \underline{e}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_i} \right\}$$

base Tangente

$$\left\{ \underline{e}^j = g^{ij} \underline{e}_i \right\}$$

base cotangente

Ogni vettore appartenente ad un piano Tangente può essere espresso sulle base tangente e sulle base cotangente scrivendo

$$\underline{P} = \underline{P}^j \underline{e}_j = P_i \underline{e}^i \quad [1]$$

Le componenti sulle base tangente, dette contravarianti, si denotano con un indice alto, le componenti sulle base cotangente, dette covarianti, si denotano con indice basso. Con facendo nell'espressione [1] si saturano sempre indice basso con indice alto.

(3)

È facile ottenere le seguenti espressioni per i prodotti scalari tra gli elementi di base tangente e cotangente.

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = g_{ij} \quad \text{per definizione}$$

$$\underline{e}^i \cdot \underline{e}^j = \frac{\partial \underline{e}^i}{\partial u^k} g_{jm} \frac{\partial \underline{e}^j}{\partial u^m} = g_{jm}^i g_{km} = \delta^i_k$$

$$\underline{e}^i \cdot \underline{e}_j = g_{jm}^i \frac{\partial \underline{e}^j}{\partial u^m} \frac{\partial \underline{e}^j}{\partial u^k} = \delta^i_k$$

$$\underline{e}^i \cdot \underline{e}^j = g_{jm}^i g_{kn}^j \underline{e}^k = g_{kn}^i \underline{e}^k = g^{ik}$$

Le componenti contravarianti e covarianti si possono esprimere semplicemente

$$\begin{cases} p^j = \underline{p} \cdot \underline{e}^j \\ p_i = \underline{p} \cdot \underline{e}_i \end{cases}$$

da cui gli sviluppi:

$$\begin{cases} \underline{p} = (p^j \underline{e}^j) \underline{e}_i \\ \underline{p} = (p_i \underline{e}_i) \underline{e}^j \end{cases}$$

I volti quindi da un spazio dotato ④
 di prodotto scalare le componenti
 di un elemento su una data base
 lo esprimono mediante i prodotti scalari
 con gli enti della base reciproca.
 Inoltre si possono trovare le relazioni
 tra le componenti contravarianti e
 quelle covarianti.

$$P^j = \underline{P} \cdot \underline{e}^j = \underline{P} g_{ij}^{-1} e_i = g_{ij}^{-1} P_i$$

$$P_i = \underline{P} \cdot e_i = \underline{P} g_{ij} e^j = g_{ij} P^j$$

In uno spazio tangente costruito in un
 punto arbitrario si possono
 costruire formalmente i bivettori
 e questi possono essere espressi sulla
 base d'identità; noi useremo come
 di consueto la base tangente e
 quella cotangente. Vedremo allora
 di ridurre a rappresentazione
 formalmente bivettori per semplicità.

... , preso uno spazio (5)
 tangente in un punto e la base
 tangente e cotangente si considerano
 una applicazione da presi due vettori
 tangenti estrae uno scalare.

$$A(\underline{p}, \underline{q}) \text{ tale che } \begin{cases} A(\alpha \underline{p}_1 + \beta \underline{p}_2, \underline{q}) = \\ \alpha A(\underline{p}_1, \underline{q}) + \beta A(\underline{p}_2, \underline{q}) \end{cases}$$

$$\text{e } \begin{cases} A(\underline{p}, \alpha \underline{q}_1 + \beta \underline{q}_2) = \\ \alpha A(\underline{p}, \underline{q}_1) + \beta A(\underline{p}, \underline{q}_2) \end{cases}$$

Esprimendo i due vettori su base
 tangente (cioè con componenti
 contravarianti) si ha semplicemente:

$$A(\underline{p}, \underline{q}) = A(\overset{\text{contra}}{\overset{\sqrt{}}{p^i}} \underline{e}_i, \overset{\text{contra}}{\overset{\sqrt{}}{q^j}} \underline{e}_j) = A(\underline{e}_i, \underline{e}_j) p^i q^j = \\ = A_{ij} p^i q^j \quad \text{dove } A_{ij} \doteq A(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$$

I vettori possono anche essere espressi
 su base cotangente quindi ci sono altri
 3 modi possibili per esprimere globalmente
 l'applicazione bilineare.

Si ottiene con pari facilità quando

$$A(\underline{p}, \underline{q}) = A(\overset{\text{contravariant}}{\underline{p}^i}, \overset{\text{covariant}}{\underline{q}_j}) = A(\underline{e}_i, \underline{e}^j) p^i q_j =$$

$$= A_i^{\ j} p^i q_j \quad \text{dove } A_i^{\ j} = A(\underline{e}_i, \underline{e}^j)$$

$$A(\underline{p}, \underline{q}) = A(\overset{\text{cov}}{\underline{p}_i}, \overset{\text{cov}}{\underline{q}_j}) = A(\underline{e}^i, \underline{e}^j) p_i q_j =$$

$$= A^{ij} p_i q_j \quad \text{dove } A^{ij} = A(\underline{e}^i, \underline{e}^j)$$

$$A(\bar{p}, \bar{q}) = A(\overset{\text{cov}}{\bar{p}_i}, \overset{\text{contravariant}}{\bar{q}^j}) = A(\underline{e}^i, \underline{e}_j) \bar{p}_i \bar{q}^j =$$

$$= A^i_{\ j} \bar{p}_i \bar{q}^j \quad \text{dove } A^i_{\ j} = A(\underline{e}^i, \underline{e}_j)$$

Visto che $p_i = g_{ij} p^j$ si introduce il
prodotto di indramento ed abbacimento
degli indici per i tensori bilineari

per sempre $A^{ij} p_i q_j = A^{ij} g_{ik} p^k q_j$
quindi $A_k^{\ j} = A^{ij} g_{ik}$

quindi T_{ik} ha alterato l'indice i del
tensore; visto che $P^i = g^{i\tau} P_\tau$ si ha

$$A_{i\tau} P^i q^\tau = A_{i\tau} g^{i\kappa} P_\kappa q^\tau = A^\kappa_{\tau} P_\kappa q^\tau$$

quindi $A^\kappa_{\tau} = A_{i\tau} g^{i\kappa}$, in questo

caso $g^{i\kappa}$ ha invertito l'indice i del
tensore. Quindi avendo a disposizione

le componenti di un tensore su un
dato set di basi covarianti e

contravarianti si può passare all'altra
rappresentazione tramite g_{ij} o g^{ij}

rispettivamente abbassando o innalzando
gli indici voluti.

Proviamo quindi alle proprietà e definizioni
di un tensore generico di rango m ($m = p + q$)

con p = grado di covarianza e q = grado di
contravarianza.

Si consideri quindi una superficie in $\mathbb{R}^n$ (3)
 $n-1$ dimensionale ($\bar{x} = \bar{x}(\bar{u}) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$) detta
 varietà Riemanniana differenziabile.

In ciascun punto $\bar{x}$ in $\bar{M}$ lo spazio tangente
 con base contravariante $\{\underline{e}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}\}$ e
 base covariante $\{\underline{e}^j = g^{ij} \underline{e}_i\}$ - ciascuna base
 ha $n-1$ vettori componenti - Fissato un
 punto $\bar{x}$ lo spazio tangente corrispondente
 con le basi suddette costruisce in tale
 spazio funzionali multilineari.

○ $A(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ con le proprietà:

$$A(\underline{v}_1, \dots, \alpha \underline{v}_J + \beta \underline{w}_J, \dots, \underline{v}_m) =$$

$$\alpha A(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_J, \dots, \underline{v}_m) + \beta A(\underline{v}_1, \dots, \underline{w}_J, \dots, \underline{v}_m)$$

$$\forall J = 1 \dots m$$

questo è un funzionale multilineare di
 rango m .

Tale oggetto, come ente geometrico astratto, per essere definito, ha bisogno solo della superficie, vista anche essa come ente geometrico e non come particolare rappresentazione parametrica.

Altro problema porre alla rappresentazione del multifunzionale tramite l'oggetto ad m indice detto tensori contravariante q vettori su base contravariante e p vettori su base covariante ($m = p + q$).

Per esempio

$$A(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) = A_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \underline{v}_1^{j_1} \underline{v}_2^{j_2} \dots \underline{v}_m^{j_m}$$

L'oggetto $A_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ si chiama tensore di rango m , q -contravariante e p -covariante.

Ovviamente con il processo di ottenimento
ed innalzamento degli indici si può
cambiare il grado di contravarianti e
covarianti lasciando invariato il rango.
Ad esempio

$$A \begin{matrix} \lambda_1^* \lambda_2^* - J_r \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{matrix} = A \begin{matrix} J_1 - J_r \\ i_1 - i_1 \end{matrix} g^{i_1 i_2} \quad \uparrow$$

$$A \begin{matrix} J_2 - J_r \\ J_1^* \lambda_1^* - i_1 \end{matrix} = A \begin{matrix} J_1 - J_r \\ \lambda_1 - i_1 \end{matrix} g_{J_1 J_1^*} \quad \downarrow$$

Legge di trasformazione di un tensor:

La superficie $\bar{U} = \bar{U}(\bar{u})$ può essere
espressa mediante altre parametrizzazioni
usando una funzione invertibile in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sia $\bar{u} = \varphi(\bar{w})$, $\bar{w} = \varphi^{-1}(\bar{u})$

Relation fra le basi contravarianti:

(21)

$$\boxed{\underline{e}_i} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_i} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_i} = \boxed{\tilde{e}_j \frac{\partial \omega_j}{\partial u_i}}$$

$$\boxed{\hat{e}_i} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \omega_i} = \boxed{e_j \frac{\partial u_j}{\partial \omega_i}}$$

Relazioni fra le basi di un vettore
(contravarianti)

$\underline{v}$ è uno spazio vettoriale:

$$\underline{v} = \tilde{v}_i^i \tilde{e}_i = v^i e_i$$

$$\tilde{v}^i \tilde{e}_i = v^i \tilde{e}_j \frac{\partial \omega_j}{\partial u_i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{v}^i = v^j \frac{\partial \omega_j}{\partial u_i}}$$

$$\boxed{\Delta \equiv C^{ij} v^j}$$

$$\tilde{v}^i e_j \frac{\partial u_j}{\partial \omega_i} = v^i e_i \Rightarrow$$

inverse for base

$$\boxed{v^i = \tilde{v}^j \frac{\partial u_j}{\partial \omega_i}}$$

$$\boxed{\Delta \equiv C_{ij} \tilde{v}^j}$$

relatione fra le componenti covarianti (1)

$$J_i = g_{ij} \tilde{v}^j$$

$$\tilde{J}_i = \hat{g}_{ij} \tilde{v}^j$$

$$\text{we} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}^j = \tilde{v}^t C_{jt} \\ g_{ij} = \hat{g}_{pq} C^{pi} C^{qj} \\ \tilde{v}^t = \hat{g}^{tk} \tilde{v}_k \end{array} \right.$$

$$J_i = \hat{g}_{pq} C^{pi} C^{qj} \hat{g}^{tk} \tilde{v}_k C_{jt} =$$

$$= \hat{g}_{pq} C^{pi} \delta^q_t \hat{g}^{tk} \tilde{v}_k =$$

$$= \hat{g}_{pt} \hat{g}^{tk} C^{pi} \tilde{v}_k =$$

$$= \delta_p^k C^{pi} \tilde{v}_k = \delta^{ki} \tilde{v}_k$$

$$\boxed{J_i = \delta^{ki} \tilde{v}_k}$$

$$\boxed{\tilde{J}_i = \delta_{ik} \tilde{v}_k}$$

relatione fra le
Componenti covarianti.

e quindi un tensore si trasforma
con:

$$A(\underline{v}_i - \underline{v}_j) = A_{\substack{I_k - J_r \\ I_1 - I_7}} \quad \overset{I_k}{J_1} \quad \overset{I_k}{J_{134}} \quad \overset{I_k}{J_{134}} \quad \overset{I_k}{J_{35}} \quad \dots \quad \overset{I_k}{J_m} \quad \overset{I_k}{-I_7} =$$

$$= A_{\substack{I_k - J_r \\ I_1 - I_7}} \quad \overset{I_k}{V_1} \quad C_{12k1} \quad \overset{I_k}{V_{234}} \quad C_{h2I_k} \dots =$$

$$= \left[A_{\substack{I_k - J_r \\ I_1 - I_7}} \quad C_{12k1} \quad C_{14k9} \quad C_{h2I_k} - C_{h7J_r} \right]$$

$$\overset{I_k}{V_1} \quad \overset{I_k}{V_{234}} \quad \overset{I_k}{V_{341}} \quad \dots \quad \overset{I_k}{J_m} =$$

$$\overset{I_k}{A} \quad \overset{I_k}{I_1 - I_7} \quad \overset{I_k}{V_1} \quad \overset{I_k}{V_{234}} \quad \overset{I_k}{V_{341}} \quad \dots \quad \overset{I_k}{J_m} \Rightarrow$$

$$\overset{I_k}{A} \quad \overset{I_k}{I_1 - I_7} = A_{\substack{I_k - J_r \\ I_1 - I_7}} \quad C_{12k1} - C_{14k9} \quad C_{h2I_k} - C_{h7J_r}$$

Legge di trasformazione di un tensore al variare
della parametrizzazione della varietà.

proprietà

(14)

→ Addizione di tensori e un tensore:

$$\underset{i_2 \dots i_n}{\overset{j_2 \dots j_r}{C}} = A \underset{i_2 \dots i_n}{\overset{j_2 \dots j_r}{T}} + B \underset{i_2 \dots i_n}{\overset{j_2 \dots j_r}{T}}$$

→ Moltiplicazione di tensori e un tensore:

$$\underset{(i) \dots (k)}{\overset{(j) \dots (h)}{C}} = A \underset{(i) \dots (k)}{\overset{(j) \dots (h)}{T}} B$$

(.) rappresenta un multi indice per semplicità

→ Contrazione di due indici forma un tensore:

$$\underset{i_2 \dots i_n}{\overset{j_2 \dots j_r}{\underset{j_1}{C}}} = \sum_{j_1=1}^{n-1} A \underset{i_2 \dots i_n}{\overset{j_2 \dots j_r}{T}}$$

→ Composizione e Contrazione di una moltiplicazione.

$$\underset{\dots}{\overset{\dots}{C}} = \sum_{r=1}^{n-1} A \underset{\dots}{\overset{\dots}{T}} B$$

Un gruppo è un insieme con una operazione binaria tale che

- 1) $\forall a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$
- 2) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 3) $\exists e \in G : \forall a \in G \Rightarrow a \cdot e = e \cdot a = a$
- 4) $\forall a \in G \exists b \in G : a \cdot b = e$

Quando si aggiunge la commutatività al gruppo si chiama Abelliano o Commutativo. Se il gruppo ha un numero finito di elementi questo viene detto ordine del gruppo.

ISOMORFISMO GRUPPALE Siano G_1 e G_2 due gruppi,

Sia ψ una applicazione biunivoca tra G_1 e G_2 .

$\forall a, b \in G_1 \Rightarrow \psi(a) \cdot \psi(b) \in G_2$ - ψ dice isomorfismo

gruppaie una applicazione biunivoca per cui

$$\psi(ab) = \psi(a) \cdot \psi(b) \quad \forall a, b \in G_1$$

legando due proprietà:

- 1) $\boxed{\psi(e_1) = e_2}$ dove e_1 ed e_2 sono gli elementi identici in G_1 e G_2

infatti per $b = e_1 \Rightarrow$

$$\varphi(a \cdot e_1) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_1) \Rightarrow$$

$$\varphi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_1) \Rightarrow \varphi(e_1) = e_1$$

2) $\boxed{\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}}$ infatti per

$$a = g \quad b = g^{-1} \Rightarrow$$

$$\varphi(e_1) = \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1})$$

$$\text{ma } \varphi(e_1) = e_1 \Rightarrow \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$$

Permutazioni

L'insieme delle permutazioni su n oggetti detto S_n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

S_n è un gruppo di ordine $n!$. L'operazione è la composizione di permutazioni.

Sottogruppi

Sia dato un gruppo G . Si dice sottogruppo di G un suo sottoinsieme che conserva le proprietà di un gruppo.

Se il gruppo è d'ordine finito basta verificare che resti chiuso rispetto alla composizione.

Se il gruppo è d'ordine infinito bisogna verificare che non divisa rispetto alla composizione e che esista l'inverso di ogni elemento.

Teorema di Cayley

ogni gruppo finito d'ordine n è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo di permutazioni S_n
dim.

Siano $a_1, \dots, a_n$ gli elementi di G ; sia $b \in G$ e costruiamo $ba_1, \dots, ba_n = \{ba_j\}$ sono sicuramente distinti infatti: $(i \neq j) ba_i \neq ba_j \Rightarrow a_i \neq a_j$ che è assurdo. Allora a si associa

la permutazione $\pi_a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ ba_1 & \dots & ba_n \end{pmatrix}$

$\forall a_i \in G$ ($i=1, \dots, n$) si costruiscono le permutazioni

$$\pi_{a_i} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_i a_1 & \dots & a_i a_n \end{pmatrix}$$

$k \neq j$

$\pi_{a_i} \neq \pi_{a_j}$ infatti se $(a_i a_1, \dots, a_i a_n) = (a_j a_1, \dots, a_j a_n) \Rightarrow (a_i a_1 = a_j a_1) \dots (a_i a_n = a_j a_n) \Rightarrow a_i = a_j$ che è assurdo. Allora con n elementi si costruiscono n permutazioni.

Idem: h_2

9

$$\Pi_{\partial_j} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_n \\ \partial_j \partial_1 & \dots & \partial_j \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 & \dots & \partial_1 \partial_n \\ \partial_j \partial_1 \partial_1 & \dots & \partial_j \partial_1 \partial_n \end{pmatrix}$$

(ponendo $\partial_1 \partial_1$ al posto di ∂_1)

$$\begin{aligned} \Pi_{\partial_j} \Pi_{\partial_i} &= \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 & \dots & \partial_1 \partial_n \\ \partial_j \partial_1 \partial_1 & \dots & \partial_j \partial_1 \partial_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_n \\ \partial_i \partial_1 & \dots & \partial_i \partial_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_n \\ \partial_j \partial_1 \partial_1 & \dots & \partial_j \partial_1 \partial_n \end{pmatrix} = \Pi_{\partial_j \partial_i} \end{aligned}$$

Questo dimostra che l'insieme delle $\{\Pi_{\partial_i}\}$ è un sottogruppo di S_n e che la relazione fra G ed S_n è un'isomorfismo naturale e un

Teorema di Lagrange

L'ordine di un sottogruppo di un gruppo finito è un divisore dell'ordine del gruppo.

dim

Sia G gruppo di ordine g e H sottogruppo di ordine $h < g$. Sia $a \in G$ ed $a \notin H$.



otteniamo $\{aH\}$

aH ha h elementi distinti inoltre viene 5
 $\in H$ infatti se $ah_j = h_i \Rightarrow a = h_i h_j^{-1}$
 da cui risulta per cui $a \in H$ allora

$$aH \cap H \neq \emptyset$$

$$\text{Card}(aH) = \text{Card}(H) = h$$

La $aH \cup H$ esprime il teorema e' finito
 ellibenti si prende $b \in G, b \notin H; b \notin aH$
 e si costruisce $\{bH\}$ da ha h elementi distinti
 Nessun elemento di $\{bH\}$ appartiene ad H ed inoltre
 nessun elemento di $\{bH\}$ appartiene ad aH
 infatti se $bh_i = ah_j \Rightarrow b = ah_j h_i^{-1}$ da cui
 risulta per cui $b \notin \{aH\}$. Si procede così
 ottenendo lo sviluppo in laterali sinistri:

$$G = H \cup aH \cup bH \cup cH \dots$$

$$a \notin H$$

$$b \notin H \quad b \notin aH$$

$$c \in H \quad c \notin aH \quad c \notin bH \dots$$

e quindi $\exists m \in \mathbb{N} : g = mh$ c.v.d.
 m e detto indice del sottogruppo H . Esiste
 l'analogo sviluppo in laterali destri:

$$G = H \cup Ha' \cup Hb' \cup Hc' \dots$$

Corollario : un gruppo d'ordine primo non
può aver sottogruppi propri. 6

note sui gruppi ciclici

un gruppo G d'ordine ciclico n tutti gli elementi
 G ottengono come potenze delle stesse
elementi $(e, a, a^2, a^3, \dots)$

Se G un gruppo d'ordine finito n : l'insieme
delle potenze di un elemento formano un
sottogruppo d'ordine d'ordine m - l'ordine di
questo sottogruppo h ha ordine dell'elemento in
 G . Per Lagrange l'ordine di un elemento
deve essere divisore dell'ordine del gruppo

Se un gruppo G ha ordine primo p allora è ciclico :

dim. : G ha ordine primo gli ordini degli
elementi sono 1 o p ma solo l'unità
ha ordine 1 quindi esiste un elemento di
ordine p quindi G è ciclico.

Sia S_n il gruppo delle permutazioni su n oggetti.

Sia σ la generica permutazione di S_n :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Si prendono tutte le possibili coppie tra gli elementi $\sigma(1) \dots \sigma(n)$ e si contano le inversioni; esistono $\binom{n}{2}$ coppie da contare.

Si definiscono permutazioni di segno pari quelle che hanno un numero pari di inversioni e di segno dispari quelle che hanno un numero dispari di inversioni.

$$\sigma \mapsto (-1)^\sigma \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si ha

$$(-1)^\sigma = \prod_{\{i, j\} \in P_2(n)} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

dove $P_2(n)$ è l'insieme delle coppie possibili in $\{1, \dots, n\}$.

Proprietà

Se $\sigma \in S_n$ è una permutazione, cambiando fra loro due elementi la permutazione cambia segno.

Proprietà

Ogni permutazione si può fare con scambi semplici. Il numero di scambi semplici è pari o dispari e secondo che la permutazione ha o non pari o dispari (la parità o disparità del numero di scambi non dipende dalle strategie seguite).

Proprietà

Le permutazioni di segno pari formano un sottogruppo, quelle di segno dispari no.

La teoria delle permutazioni è utile nello studio della teoria dei determinanti.

Si introduce a tale fine il simbolo di permutazione di Levi-Civita:

$$\sigma_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{se ci sono ripetizioni negli indici} \\ \pm 1 & \text{permutazioni di segno pari} \\ -1 & \text{permutazioni di segno dispari} \end{cases}$$

Sia A una matrice $n \times n$; si definisce
determinante di A

9

$$\det(A) = \sum_{i_1 \dots i_n} A_{1i_1} \dots A_{ni_n} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}$$

proprietà permutazioni

$$\begin{cases} (-1)^{\sigma\tau} = (-1)^\sigma (-1)^\tau \\ (-1)^\tau = (-1)^{\tau^{-1}} \end{cases}$$

proprietà determinante $\rightarrow \det A = \det A^T$

$\rightarrow$ dipende lin. da righe e colonne di A

$\rightarrow \det I = 1$

$\rightarrow$ scambiando 2 righe o 2 colonne
cambia segno

$\rightarrow \det(AB) = \det(A) \det(B)$ (Briet)

formule utili per dimostrare Briet (vedi pag. 11)

$$\sum_{i_1 \dots i_n} A_{1i_1} \dots A_{ni_n} = (\det A) \sum_{j_1 \dots j_n} A_{1j_1} \dots A_{nj_n}$$

10

Def equivalente a det (sviluppo di Laplace lungo righe e colonne)

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall i$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

dato la matrice A_{ij} si definiscono i

cofattori

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} A \text{ senza riga } i \text{ e colonna } j \end{pmatrix}$$

posto $\text{agg}(A) = (a_{ij})$ si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{agg}^T(A) \quad \text{se } \det(A) \neq 0$$

Un'ultima proprietà

Se (e_i) base canonica di $\mathbb{R}^n$; se $\sigma \in S_n$;

$$\text{Se } A = [e_{\sigma(1)} \mid \dots \mid e_{\sigma(n)}] \Rightarrow$$

$$\det A = (-1)^\sigma$$

nota sulle due del teorema di Binet

41

$$\det(AB) = \eta_{i_1 \dots i_n} (AB)_{1i_1} \dots (AB)_{ni_n} =$$

$$= \eta_{i_1 \dots i_n} A_{1j_1} B_{j_1 i_1} \dots A_{nj_n} B_{j_n i_n} =$$

$$= \eta_{i_1 \dots i_n} A_{1j_1} \dots A_{nj_n} B_{j_1 i_1} B_{j_n i_n} =$$

$\eta_{j_1 \dots j_n} \det B$

$$= \det B \eta_{j_1 \dots j_n} A_{1j_1} \dots A_{nj_n} =$$

$$= \det B \det A \quad \text{c.v.d.}$$

nota sul delta di Kronecker
generalizzato

12

Def

$$\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_1}^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_p}^{j_1} & \dots & \delta_{i_p}^{j_p} \end{vmatrix}$$

Si ha che:

$$\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{i_1 \dots i_p\} \neq \{j_1 \dots j_p\} \\ 0 & \text{se } i_1 \dots i_p \text{ e } j_1 \dots j_p \text{ insieme di } p \text{ elementi} \\ (-1)^{\tau} & \text{se gli insiemi sono} \\ & \text{uguali e } \tau \text{ è la} \\ & \text{permutazione che} \\ & \text{porta una sequenza} \\ & \text{nell'altra.} \end{cases}$$

Proprietăți fundamentale

$$1) \quad \eta_{i_1 \dots i_n} = \int_{i_1 \dots i_n} 1 \dots n$$

$$2) \quad \eta_{i_1 \dots i_n} \eta_{j_1 \dots j_m} = \int_{j_1 \dots j_m} i_1 \dots i_n$$

$$3) \quad \int_{i_1 \dots i_p} i_{p+1} \dots i_n = p! \int_{i_{p+1} \dots i_n} j_{p+1} \dots j_n$$

(în particular:

$$\int_{i_{p+1} \dots i_n} i_{p+1} \dots i_n = \int_{i_{p+1} \dots i_n} j_{p+1} \dots j_n$$

Misura sulla varietà differenziabile 1

Sia data una varietà differenziabile parametrizzata nel modo $X_j = X_j(u_1, \dots, u_{m-1})$ con $j=1, \dots, m$. In ciascun punto sono dati i vettori base dello spazio tangente $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_{m-1}}$ ed il vettore normale $\bar{n}$ che completa a base di $\mathbb{R}^m$.

proprietà

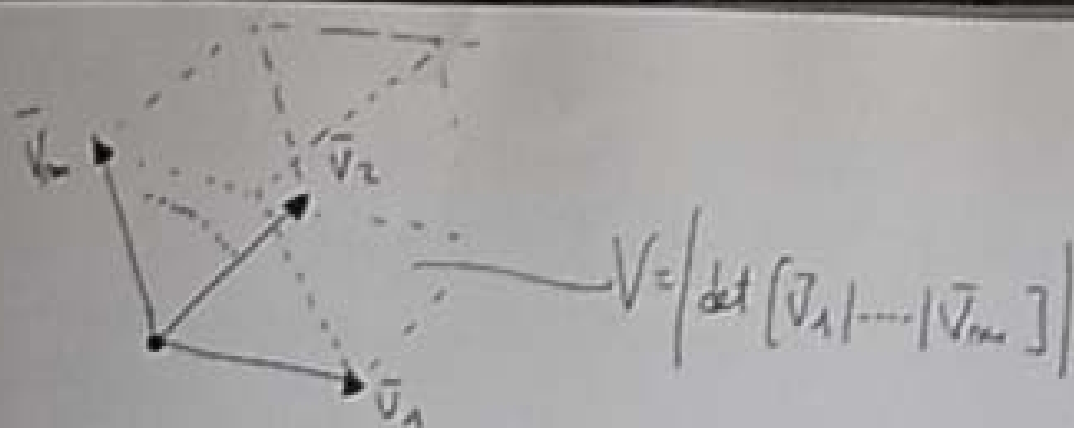
Dati in $\mathbb{R}^m$ m vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ essi formano un parallelepipedo m -dimensionale il cui volume è dato da

$$|\det [\bar{v}_1 | \dots | \bar{v}_m]|$$

nota

Tale proprietà è quella che consente di scrivere le formule del cambiamento di variabili per integrali multipli:

$$\int_A f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\bar{y}^{-1}(A)} f(g(\bar{y})) \left| \det \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \right| d\bar{y}$$



Usiamo tali proprietà per definire la misura su un dominio di una varietà. Prendiamo un punto di partenza P dato dai parametri $u_1^0, \dots, u_{n-1}^0$ e un insieme di variabili $du_1, \dots, du_{n-1}$. Si formano $n-1$ vettori tangenti che costituiscono $\vec{T}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0)$ con $\vec{T}(u_1^0, \dots, u_i^0 + \delta u_i, \dots, u_{n-1}^0)$. Essi al primo ordine si scrivono come:

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial u_1} \delta u_1, \dots, \frac{\partial \vec{T}}{\partial u_{n-1}} \delta u_{n-1}. \text{ Allora, per}$$

questo dato primo l'elemento di volume V_h della varietà si scrive con le seguenti considerazioni. Poi si sommano $V \in V_h$.

$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i}$ sono $n-1$ vettori d. $\mathbb{R}^n$ appartenenti alla spazio tangente. Nel punto P della spazio tangente formano una base ortonormale quaternari $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-1}$ tale che $\bar{f}_i \cdot \bar{f}_j = 0 \quad \forall i, j$. Naturalmente $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-1}$ sono vettori d. $\mathbb{R}^n$ anch'essi.

Ha $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i} = \alpha_{ik} \bar{f}_k$ che sviluppo sul piano Tangente. La precedente vale $\forall i, k=1 \dots n-1$.

Inoltre $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i} \Delta u_i = \alpha_{ik} \Delta u_i \bar{f}_k$ sono i vettori lato

le $(n-1)$ -uple $\alpha_{ik} \Delta u_i$ sono quelle che formano il parallelepipedo in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Quindi:

$$V_h = \left| \det_n [\alpha_{ik} \Delta u_i] \right| =$$

$$= \left| \det_n [\alpha_{ik}] \right| \Delta u_1 \dots \Delta u_{n-1}$$

Visto che $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i} = \alpha_{ik} \bar{f}_k \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i} \cdot \bar{f}_j = \alpha_{ik} \bar{f}_k \cdot \bar{f}_j \Leftrightarrow d_{ij} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u_i} \cdot \bar{f}_j$$

Allora:

4

$$V_h = \left| \det_{n-1} \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i} \cdot \bar{f}_k \right] \right| \Delta u_1 \dots \Delta u_{n-1}$$

completa base di $\mathbb{R}^n$ la serie $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-1}$

con $\bar{f}_n = \bar{m}$ con $|\bar{m}| = 1$ normale alla varietà.

Poi completa a base non ortogonale di $\mathbb{R}^n$

$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_{n-1}}$ con $\bar{m}$. Allora ($\det B = \det [\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}]$):

$$V_h = \left| \det_m \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} \cdot \bar{f}_1 & \dots & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_{n-1}} \cdot \bar{f}_1 & \bar{m} \cdot \bar{f}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} \cdot \bar{f}_{n-1} & \dots & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_{n-1}} \cdot \bar{f}_{n-1} & \bar{m} \cdot \bar{f}_{n-1} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} \cdot \bar{f}_n & \dots & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_{n-1}} \cdot \bar{f}_n & \bar{m} \cdot \bar{f}_n \end{pmatrix} \right| \Delta u_1 \dots \Delta u_{n-1}$$

tutti nulli.
tutti nulli per costruzione.
↓
1

pongo $\bar{A}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}$ per $i=1, n-1$, $\bar{A}_n = \bar{m}$ e i.c.m.

allora

$$V_h = \left| \det_n(J) \right| \Delta u_1 \dots \Delta u_{n-1} \text{ dove } J_{ki} = \bar{A}_i \cdot \bar{f}_k$$

$$(J^T J)_{ki} = (\bar{A}_k \cdot \bar{f}_j)(\bar{A}_i \cdot \bar{f}_j) = A_k^a f_j^a A_i^b f_j^b = A_k^a A_i^b \delta_{ab} =$$

$$\left(\begin{matrix} a & a \\ f_j & f_j \end{matrix} \right) \text{ è una matrice ortogonale} \quad \Rightarrow A_k^a A_i^a = \bar{A}_k \cdot \bar{A}_i$$

$$\det_n (J^T J) = \det_n^2 (J) = \det_n (\bar{A}_n \cdot \bar{A}_1) =$$

$$= \det_n \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} \cdot \bar{u} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} \cdot \bar{u} & \dots & \bar{u} \cdot \bar{u} \end{bmatrix} = \det_n (g)$$

allora $\det J = \sqrt{\det g} \Rightarrow$

$$V_h = \sqrt{\det g} \, \Delta u_1 \dots \Delta u_n$$

dove il determinante della prima forma fondamentale è un determinante di una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Il volume con tale determinante è l'elemento fondamentale per la costruzione di una misura sulla varietà differenziabile.

Allora infine:

5

$$V_h = \sqrt{\det(g)} \Delta u_1 \dots \Delta u_n$$

e quindi:

$$V = \sum_h V_h = \sum \sqrt{\det(g)} \Delta u_1 \dots \Delta u_n$$

Nel limite:

$$V = \text{mis}(\Omega) = \int_A \sqrt{\det(g)} \, du_1 \dots du_n$$

dove $\Omega = \pi(A)$.

Con questo è stata definita una misura sulla varietà differenziabile.

Verifichiamo che tale definizione è invariante al cambio di variabili sulla varietà stessa.

$$\text{Siz } \bar{u} = f(\bar{w})$$

6

$$\int_A \sqrt{\det(g_{ij})} \, d\bar{u} =$$

$$\int_{f^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{w}_\alpha} \frac{\partial \bar{w}_\alpha}{\partial u_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{w}_\beta} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial u_j}\right)} \left| \det\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}}\right] \right| d\bar{w} =$$

$$= \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(\frac{\partial \bar{w}_\alpha}{\partial u_i} \hat{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial u_j}\right)} \left| \det\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}}\right] \right| d\bar{w} =$$

$$= \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}\right]^T \hat{g} \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}\right]\right)} \left| \det\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}}\right] \right| d\bar{w} =$$

$$= \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}\right) \det(\hat{g}) \det\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}\right)} \left| \det\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}}\right] \right| d\bar{w} =$$

$$= \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{\det(\hat{g})} \, d\bar{w}$$

c.v.d.

$$\left(\text{unfollar } \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}}\right] \cdot \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}}\right] = I \right).$$

La definizione di misura è legata al concetto di normale alla varietà come segue: data la base dello spazio tangente $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}$ ($i=1, \dots, n-1$) si vuole trovare un vettore ortogonale a tutti questi che completa la base di $\mathbb{R}^n$.

Un vettore normale non normalizzato è il seguente:

$$N_i = \eta_{i j_1 \dots j_{n-1}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{j_{n-1}}}{\partial u_{n-1}}$$

dove η è il simbolo di permutazione di Levi-Civita ($=0$ se vi sono due o più indici uguali, $=(-1)^\sigma$ se $(j_1, \dots, j_{n-1})$ è una permutazione σ di $1, \dots, n-1$.)

$$\bar{N} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_k} = \eta_{i j_1 \dots j_{n-1}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{j_{n-1}}}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial x_i}{\partial u_k}$$

da cui si vede per l'antisimmetria di η .

Calcolo la norma di N_i :

$$N_i N_i = \eta_{i I_1 \dots I_m} \eta_{i K_1 \dots K_m}$$

$$= \frac{\partial \chi_{I_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{I_m}}{\partial u_m} \frac{\partial \chi_{K_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{K_m}}{\partial u_m}$$

$$\Rightarrow \eta_{i I_1 \dots I_m} \eta_{i K_1 \dots K_m} = \int \frac{i I_1 \dots I_m}{i K_1 \dots K_m}$$

$$\Rightarrow \int \frac{i I_1 \dots I_m}{i K_1 \dots K_m} = \int \frac{I_1 \dots I_m}{K_1 \dots K_m} \quad \text{quindi}$$

$$N_i N_i = \int \frac{I_1 \dots I_m}{K_1 \dots K_m} \frac{\partial \chi_{I_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{I_m}}{\partial u_m} \frac{\partial \chi_{K_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{K_m}}{\partial u_m} =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_{K_1}^{I_1} & \dots & \int_{K_1}^{I_{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{K_m}^{I_1} & \dots & \int_{K_m}^{I_m} \end{vmatrix} \frac{\partial \chi_{I_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{I_m}}{\partial u_m} \frac{\partial \chi_{K_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \chi_{K_m}}{\partial u_m}$$

Usa la proprietà $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot b =$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12} \\ a_{21}b & a_{22} \end{pmatrix}$$

e porta sulle righe e colonne tutte le derivate:

$$N_i N_i = \begin{vmatrix} \int_{k_1}^{j_1} \frac{\partial X_{i1}}{\partial u_1} \frac{\partial X_{i1}}{\partial u_1} & \dots & \int_{k_1}^{j_1} \frac{\partial X_{i1}}{\partial u_1} \frac{\partial X_{i1}}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{k_{n-1}}^{j_{n-1}} \frac{\partial X_{in-1}}{\partial u_1} \frac{\partial X_{in-1}}{\partial u_1} & \dots & \int_{k_{n-1}}^{j_{n-1}} \frac{\partial X_{in-1}}{\partial u_1} \frac{\partial X_{in-1}}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial X_a}{\partial u_1} \frac{\partial X_a}{\partial u_1} & \frac{\partial X_a}{\partial u_1} \frac{\partial X_a}{\partial u_{n-1}} \\ \frac{\partial X_a}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial X_a}{\partial u_1} & \frac{\partial X_a}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial X_a}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \det(g)$$

$$\| \bar{N} \| = \sqrt{\bar{N} \cdot \bar{N}} = \sqrt{\det g}$$

Quindi la normale normalizzata è: ¹⁰

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \gamma_{i_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_n} \dots \frac{\partial x_{i_{n-1}}}{\partial u_n}$$

Quindi l'elemento di misura compen come
norma del vettore normale.

Derivazione covariante e covariante

Per una varietà Riemanniana, una linea in essa è un campo tensoriale (cioè una applicazione tra la varietà e lo spazio dei tensori, cioè ancora un tensori dipendente dal punto in cui si costruisce lo spago tangente) vedremo come definire la derivazione covariante e covariante.

Sia $\bar{F} = \bar{F}(\bar{u})$ lo spag n -s dimensionale $\bar{F}$ e $\bar{u} = \bar{u}(t)$ lo spag k in una

Sia $A = A(\bar{u}; \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ il campo

tensoriale con $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ tangenti alla superficie in $\bar{u}$.

la derivata covariante si definisce con

(16)

Siano $\underline{v}_1 - \underline{v}_m$ vettori fra loro tangenti in U

Con $U \in \text{curve} \in \text{superficie}$

$\underline{v}_1 - \underline{v}_m$ possono essere trasportati
per parallelismo lungo $\gamma \in \delta$

la derivata si definisce così:

$$D_{\gamma} A = \frac{A(\bar{u}(t+\Delta t); \underline{v}_1 + \Delta \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m + \Delta \underline{v}_m) - A(\bar{u}, \underline{v}_1 - \underline{v}_m)}{\Delta t}$$

$\underline{v}_1 + \Delta \underline{v}_1 - \underline{v}_m + \Delta \underline{v}_m$ due vettori tangenti
nell'opero costruito su $\bar{u}(t+\Delta t)$ in
quanto garantiti per parallelismo lungo δ .

$D_{\gamma} A$ per come è costruita è un invariante
e il risultato, come vedremo, avrà quindi
carattere tensoriale.

Nella nota 'Introduzione al trasporto parallelo' ⑦
 abbiamo visto come i coefficienti di Christoffel,
 che assumono ora il significato di coefficienti
 di connessione, regolano il parallelismo di trasporto
 parallelo lungo una linea di un vettore
 tangente; sappiamo che tale trasporto in
base contravariante si mette in relazione con le
 equazioni differenziali:

$$\boxed{\frac{dV^i}{dt} = -V^j \frac{d\Gamma_{ij}^k}{dt} \left\{ \begin{matrix} j & i \\ k \end{matrix} \right\}}$$

trasp. par.
su base
contravariante

Vediamo come diventare tale relazione per le
 componenti covarianti:

$$V_i = g_{ij} V^j$$

Derivando la precedente rispetto al parametro t :

(12)

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{dg_{ij}}{dt} V^j + g_{ij} \frac{dV^j}{dt} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt} V^j + g_{ij} \left[-V^p \frac{du_k}{dt} \left\{ \begin{matrix} p & k \\ & j \end{matrix} \right\} \right] =$$

$$\text{m2} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \begin{bmatrix} k & j \\ i & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} k & j \\ i & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \right\} \frac{du_k}{dt} V^j - g_{ij} V^p \frac{du_k}{dt} \left\{ \begin{matrix} p & k \\ & j \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} k & j \\ i & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \right\} \frac{du_k}{dt} V^j - V^p \frac{du_k}{dt} \begin{bmatrix} p & k \\ i & \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} k & j \\ i & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \right\} \frac{du_k}{dt} V^j - V^j \frac{du_k}{dt} \begin{bmatrix} j & k \\ i & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \frac{du_k}{dt} V^j = \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \frac{du_k}{dt} g^{jp} V_p$$

(19)

$$\frac{dV^i}{dt} = \left\{ \begin{matrix} k & i \\ & p \end{matrix} \right\} \frac{du_k}{dt} V_p$$

cioè cambiano nome agli indici:

$$\boxed{\frac{dV^i}{dt} = V_J \frac{du_S}{dt} \left\{ \begin{matrix} i & S \\ & J \end{matrix} \right\}}$$

trans. par.
in base
covariante

Il teorema parallelo considerando un dt finito sulla linea α otteniamo mediante:

$$\begin{cases} \Delta V^i = - V^J \frac{du_S}{dt} \left\{ \begin{matrix} J & S \\ \alpha & i \end{matrix} \right\} \Delta t & (\text{contr.}) \\ \Delta V_{\alpha}^i = V_J \frac{du_S}{dt} \left\{ \begin{matrix} i & S \\ & J \end{matrix} \right\} \Delta t & (\text{cov.}) \end{cases}$$

parto

(50)

$$A(\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) = A_{i_1 - i_q}^{j_1 - j_p}(\bar{u}) V_1^{i_1} \dots V_q^{i_q} V_{q+1, j_1} \dots V_{q+p, j_p}$$

mi ha la derivata covariante

$$D_\delta A = \frac{A_{i_1 - i_q}^{j_1 - j_p}(\bar{u}(t+\delta t)) (V_1^{i_1} + \Delta V_1^{i_1}) \dots (V_{q+p, j_p} + \Delta V_{q+p, j_p}) - A_{i_1 - i_q}^{j_1 - j_p}(\bar{u}(t)) (V_1^{i_1} \dots V_{q+p, j_p})}{\Delta t}$$

dove

$$\Delta V_k^{i_k} = - V_k^{i_k} \frac{du_s}{dt} \left\{ \begin{matrix} i_k, s \\ i_k \end{matrix} \right\} \Delta t$$

$$\Delta V_{q+h, i_h} = + V_{q+h, i_h} \frac{du_s}{dt} \left\{ \begin{matrix} i_h, s \\ i_h \end{matrix} \right\} \Delta t$$

Eliminando a numeratore tutte le
componenti che contengono 2 o più
st nello stesso gruppo a. ha.

$$D_t A = A_{i_2 - i_q}^{j_1 - j_p} (\bar{u}(t, x)) \left(V_{i_1}^{i_2} \dots V_{q+p, j_p} \right) +$$

$$- A_{i_2 - i_q}^{j_1 - j_p} (\bar{u}(t)) \left(V_{i_1}^{i_2} \dots V_{q+p, j_p} \right) +$$

+ tutti i termini su $\frac{dx}{dt}$

da cui :

$$\begin{cases} (h) = h_1 \dots h_p \\ (i) = i_1 \dots i_q \end{cases}$$

$$D_t A = \left[A_{(i)ne}^{(h)} \right] \frac{du_e}{dt} V_{i_1}^{i_2} \dots V_{q+p, j_p}$$

note

$$A_{(i)ne}^{(h)} = \frac{\partial A_{(i)}^{(h)}}{\partial u_e} - \sum_{r=1}^q \sum_{j=1}^{n-A} A_{i_1 \dots i_{r-1}, j, i_{r+1} \dots i_q}^{(h)} \begin{Bmatrix} i_r \\ j \end{Bmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{m-A} A_{h_1 \dots h_{r-1}, j, h_{r+1} \dots h_p}^{(h)} \begin{Bmatrix} j \\ h_r \end{Bmatrix}$$

Esempi specifici

(22)

1) Derivata covariante di un vettore
controvariante $T^i = T^i(\bar{u})$; $\gamma: \bar{u}(t)$ è la linea:

$$D_\gamma T = \frac{T^i(\bar{u}(t+\Delta t))(V_i + \Delta V_i) - T^i(\bar{u}) V_i}{\Delta t} =$$

$$= \frac{T^i(\bar{u}(t+\Delta t)) \left(V_i + V_j \frac{du_j}{dt} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} \Delta t \right) - T^i(\bar{u}) V_i}{\Delta t} =$$

$$= \frac{T^i(\bar{u}(t+\Delta t)) - T^i(\bar{u})}{\Delta t} V_i + T^i(\bar{u}(t+\Delta t)) V_j \frac{du_j}{dt} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\}$$

Nel limite per $\Delta t \rightarrow 0$, $\bar{u}(t+\Delta t) = \bar{u}(t) + \frac{d\bar{u}}{dt} \Delta t$ e
quindi $T^i(\bar{u}(t+\Delta t)) = T^i\left(\bar{u}(t) + \frac{d\bar{u}}{dt} \Delta t\right) =$

$$= T^i(\bar{u}(t)) + \frac{\partial T^i}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt} \Delta t$$

$$D_\gamma T = \frac{\partial T^i}{\partial u_k} V_i \frac{du_k}{dt} + T^i V_j \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} \frac{du_j}{dt}$$

$$D_\gamma T = \left\{ \frac{\partial T^i}{\partial u_s} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ s \end{smallmatrix} \right\} T^s \right\} \frac{du_s}{dt} V_i = T^i{}_{||s} \frac{du_s}{dt} V_i$$

$$T^i{}_{||s} = \frac{\partial T^i}{\partial u_s} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ s \end{smallmatrix} \right\} T^s$$

2) Derivazione covariante di un vettore
covariante $T_i = T_i(\bar{u})$ (23)

$$\begin{aligned}
 D_t T &= \frac{T_i(\bar{u}(t+\Delta t)) (v^i + \Delta v^i) - T_i(\bar{u}(t)) v^i}{\Delta t} \\
 &= \frac{T_i(\bar{u}(t+\Delta t)) (v^i + -v^j \left\{ \begin{smallmatrix} j & s \\ i & \end{smallmatrix} \right\} \frac{du_s}{dt} \Delta t) - T_i(\bar{u}(t)) v^i}{\Delta t} \\
 &= \frac{T_i(\bar{u}(t+\Delta t)) - T_i(\bar{u}(t))}{\Delta t} v^i - T_i v^j \left\{ \begin{smallmatrix} j & s \\ i & \end{smallmatrix} \right\} \frac{du_s}{dt}
 \end{aligned}$$

nel limite:

$$D_t T = \frac{\partial T_i}{\partial u_s} \frac{du_s}{dt} v^i - T_i v^j \left\{ \begin{smallmatrix} j & s \\ i & \end{smallmatrix} \right\} \frac{du_s}{dt}$$

$$D_t T = \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial u_s} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & s \\ \kappa & \end{smallmatrix} \right\} T_\kappa \right\} \frac{du_s}{dt} v^i$$

$$T_{i\kappa s} = \frac{\partial T_i}{\partial u_s} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & s \\ \kappa & \end{smallmatrix} \right\} T_\kappa$$

3) Derivazione covariante di un tensore
doppio controvariante $T^{ij} = T^{ij}(\bar{u})$

(24)

$$D_r T = \frac{T^{ij}(\bar{u}(t+\Delta t)) (V_i + \Delta V_i) (W_j + \Delta W_j) - T^{ij}(\bar{u}) V_i W_j}{\Delta t} =$$

$$= \frac{T^{ij}(\bar{u}(t+\Delta t)) \left(V_i + V_i \frac{du_s}{dt} \left\{ \frac{is}{s} \right\} \Delta t \right) \left(W_j + W_j \frac{du_s}{dt} \left\{ \frac{js}{s} \right\} \Delta t \right) + T^{ij}(\bar{u}) V_i W_j}{\Delta t}$$

$$= \frac{T^{ij}(\bar{u}(t+\Delta t)) V_i W_j - T^{ij}(\bar{u}) V_i W_j}{\Delta t} + T^{ij} V_i W_k \frac{du_s}{dt} \left\{ \frac{js}{k} \right\} + T^{ij} V_s \frac{du_s}{dt} \left\{ \frac{is}{s} \right\} W_j + \text{termini in } \Delta t^2 =$$

$$= \frac{\partial T^{ij}}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt} V_i W_j + T^{ij} V_i W_k \left\{ \frac{js}{k} \right\} \frac{du_s}{dt} + T^{ij} V_s W_j \left\{ \frac{is}{s} \right\} \frac{du_s}{dt}$$

$$= \left\{ \frac{\partial T^{ij}}{\partial u_k} + T^{is} \left\{ \frac{sk}{j} \right\} + T^{sj} \left\{ \frac{sk}{i} \right\} \right\} \frac{du_k}{dt} V_i W_j$$

$$T^{ij}{}_{|k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial u_k} + T^{is} \left\{ \frac{sk}{j} \right\} + T^{sj} \left\{ \frac{sk}{i} \right\}$$

(25)

Le altre due derivazioni covarianti di tensori doppi sono:

$$T_{ij||k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial u_k} - T_{is} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ s \end{matrix} \right\} - T_{sj} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ s \end{matrix} \right\}$$

$$T^i_{j||k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial u_k} + T^s_j \left\{ \begin{matrix} s & k \\ i \end{matrix} \right\} - T^i_s \left\{ \begin{matrix} j & k \\ s \end{matrix} \right\}$$

Regola mnemonica:

$$T^{(\dots \overset{i}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)}_{(\dots \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots) || s} = \frac{\partial T^{(\dots \overset{i}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)}_{(\dots \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)}}{\partial u_s} + \dots + T^{(\dots \overset{k}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)}_{(\dots \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)} \left\{ \begin{matrix} k & s \\ i \end{matrix} \right\} + \dots$$

$$\dots - T^{(\dots)}_{(\dots \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\vdots}} \dots)} \left\{ \begin{matrix} j & s \\ k \end{matrix} \right\}$$

Il derivato covariante di un tensore è sempre un tensore.

Divergenza

(26)

Visto che la derivata covariante è sempre un tensore ogni contrazione della derivata è sempre un tensore.

Si definisce divergenza la quantità:

$$\text{div} T = T^i{}_{||i}$$

$$\text{Visto che } T^i{}_{||s} = \frac{\partial T^i}{\partial u_s} + \left\{ \begin{matrix} K & s \\ & i \end{matrix} \right\} T^K \quad \text{si ha:}$$

$$\text{ha: } T^i{}_{||i} = \frac{\partial T^i}{\partial u_i} + \left\{ \begin{matrix} K & i \\ & i \end{matrix} \right\} T^K$$

$$\text{Calcolo } \left\{ \begin{matrix} K & i \\ & i \end{matrix} \right\}, \text{ dato che } \left\{ \begin{matrix} K & s \\ & i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial g_{Kj}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial u_K} - \frac{\partial g_{Ks}}{\partial u_j} \right)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} K & i \\ & i \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial g_{Kj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial u_K} - \frac{\partial g_{Ki}}{\partial u_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{Kj}}{\partial u_i} + \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_K} - \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{Ki}}{\partial u_j} \end{aligned}$$

Inverte i con j nel primo termine: (27)

$$\frac{1}{2} g_{ji}^{-1} \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j}$$

ma $g_{ij}^{-1} = g_{ji}^{-1} \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g_{ij}^{-1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{1}{2} \text{tr}[G^{-1} \dot{G}]$$

ma $\frac{d}{dt}(\det A) = \det A \cdot \text{tr}[A^{-1} \cdot \dot{A}] \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u_k} \quad \text{dove } g = \det G$$

Allora:

$$T^i{}_{||i} = \frac{\partial T^i}{\partial u_i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u_k} T^k \quad \underline{\underline{1^{\circ} \text{ forma della divergenza}}}$$

Calcolo ora

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{|g|} T^i)$$

(23)

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\left(\frac{2\sqrt{|g|}}{\partial u_i} \right) T^i + \sqrt{|g|} \frac{\partial T^i}{\partial u_i} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{\partial |g|}{\partial u_i} T^i + \sqrt{|g|} \frac{\partial T^i}{\partial u_i} \right] =$$

$$= \frac{\partial T^i}{\partial u_i} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{|g|}{g} \frac{\partial g}{\partial u_i} T^i =$$

$$= \frac{\partial T^i}{\partial u_i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u_i} T^i \quad \text{quindi:}$$

$$T^{i||i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{|g|} T^i)$$

2^a forma
della
divergenza

Se $g=1$ si torna alla solita definizione
di divergenza in coordinate cartesiane.

Lemma di Ricci

(29)

Si tratta del calcolo del derivato
covariante della prima forma presa
come tensore: $g_{ij} \rightarrow g_{ij||k}$ -

Per la prima formula di pag. 25 si ha:

$$g_{ij||k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - g_{is} \left\{ \begin{matrix} s \\ j \end{matrix} \right\}^k - g_{sj} \left\{ \begin{matrix} s \\ i \end{matrix} \right\}^k =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - g_{is} g_{st}^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_t} \right) +$$
$$- \frac{1}{2} g_{sj} g_{st}^{-1} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_t} \right) =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \delta_i^t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_t} \right) +$$
$$- \delta_j^t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_t} \right) =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} \right)$$

$\uparrow \uparrow \quad \uparrow$

quindi

$$g_{iJ||K} = 0$$

Lemma di Ricci.

Analogamente si ha

$$g^{iJ}{}_{||K} = 0$$

Inoltre è semplice verificare che

$$\delta^i_{J||K} = 0$$

Formule fondamentali di geometria delle superficie

①

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g^{-1} f) \quad \text{curvatura media}$$

$$K = \det(f^{-1} f) \quad \text{curvatura gaussiana}$$

Equazioni di Gauss:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_k} + f_{ij} \vec{n}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \ j, \ s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} g_{sk} \quad \text{Christoffel 1ª specie}$$

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ i \ j \end{matrix} \right\} = g^{ps} \left\{ \begin{matrix} i \ j, \ s \end{matrix} \right\} \quad \text{Christoffel 2ª specie}$$

Equazioni di Weingarten:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_j} = - f_{jh} g^{hk} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_k}$$

Riemann 1ª specie:

$$(r_j, s_t) = g_{jk} \left\{ r^k, s_t \right\}$$

Riemann 2ª specie:

$$\begin{aligned} \left\{ r^k, s_t \right\} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \left\{ \begin{matrix} k \\ r \ s \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left\{ \begin{matrix} k \\ r \ t \end{matrix} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{matrix} j \\ r \ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ t \ j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} j \\ r \ t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ s \ j \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Equazioni di Gauss e Hayward - Codazzi:

(2)

$$(r\ h, s\ t) = f_{rs} f_{th} - f_{rt} f_{sh}$$

$$\frac{\partial f_{rs}}{\partial \alpha_t} - \frac{\partial f_{rt}}{\partial \alpha_s} = \left\{ \begin{matrix} r \\ t \end{matrix} \right\}^k f_{sk} - \left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\}^s f_{tk}$$

Derivazioni covarianti

$$T^i{}_{||s} = \frac{\partial T^i}{\partial \alpha_s} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} T^k$$

$$T_{i||s} = \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_s} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i s \end{matrix} \right\} T_k$$

$$T^{ij}{}_{||k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial \alpha_k} + T^{is} \left\{ \begin{matrix} j \\ sk \end{matrix} \right\} + T^{sj} \left\{ \begin{matrix} i \\ sk \end{matrix} \right\}$$

$$T_{ij||k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_k} - T_{is} \left\{ \begin{matrix} s \\ jk \end{matrix} \right\} - T_{sj} \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\}$$

$$T^i{}_{j||k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial \alpha_k} + T^s_j \left\{ \begin{matrix} i \\ sk \end{matrix} \right\} - T^i_s \left\{ \begin{matrix} s \\ jk \end{matrix} \right\}$$

$$\text{div } T = T^i{}_{||i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\sqrt{g} T^i)$$

Ricci: $g_{ij||k} = 0$

$$g^{ij}{}_{||k} = 0$$

$$\delta^i{}_{j||k} = 0$$

prodotto: $(T^{ij} \sqrt{g})_{;e} = T^{ij}_{;e} \sqrt{g} + T^{ij} \sqrt{g}_{;e}$ (3)

quindi: $\sqrt{g}^{i}_{;e} = (g^{ij} \sqrt{g})_{;e} = \underbrace{g^{ij}_{;e} \sqrt{g} + g^{ij} \sqrt{g}_{;e}}_{0 \text{ (Ricci)}} = g^{ij} \sqrt{g}_{;e}$

cioè: $\sqrt{g}^{i}_{;e} = g^{ij} \sqrt{g}_{;e}$

derivata covariante: $T_h{}^{ij} \triangleq g^{jk} T_{hik}$

operatore di Laplace Beltrami:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}$$

derivata ricale

$$f_{;eik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_e \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} j \\ e \ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

(4)

Variatione della prima forma

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{\alpha})$ superficie

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} \equiv \vec{e}_i \quad ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2|}$$

$$ds^2 = g_{jk}(\vec{\alpha}) d\alpha_j d\alpha_k \quad ; \quad g_{jk}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_k}$$

Variatione delle superfici:

(componenti controvarianti dello spostamento)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}(\vec{\alpha}) &= \mu^i(\vec{\alpha}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} + \mu^n \vec{n} = \\ &= \mu^i(\vec{\alpha}) \vec{e}_i + \mu^n \vec{n} \end{aligned}$$

$$\vec{r}'(\vec{\alpha}) = \vec{r}(\vec{\alpha}) + \Delta \vec{r}(\vec{\alpha})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \Delta \vec{r}}{\partial \alpha_k} = \\ &= \frac{\partial \vec{r}(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k} + \sum_i \left(\frac{\partial \mu^i(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k} \vec{e}_i + \mu^i(\vec{\alpha}) \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_k \partial \alpha_i} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial \mu^n}{\partial \alpha_k} \vec{n} + \mu^n \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_k} \end{aligned}$$

Usa Gauss e Killingstein:

(5)

$$\frac{\partial \bar{r}^i(\vec{a})}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \bar{r}(\vec{a})}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial u^i(\vec{a})}{\partial \alpha_k} \vec{e}_i +$$

$$+ \mu^i(\vec{a}) \left\{ \begin{matrix} p \\ \kappa i \end{matrix} \right\} \vec{e}_p + \mu^i(\vec{a}) f_{\kappa i} \vec{m} +$$

$$+ \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_k} \vec{n} - \mu^n f_{\kappa s} g^{st} \vec{e}_t =$$

$$= \frac{\partial \bar{r}(\vec{a})}{\partial \alpha_k} + \left[\frac{\partial u^i(\vec{a})}{\partial \alpha_k} + \mu^s(\vec{a}) \left\{ \begin{matrix} i \\ \kappa s \end{matrix} \right\} - \mu^n f_{\kappa s} g^{si} \right] \vec{e}_i$$

$$+ \mu^i(\vec{a}) f_{\kappa i} \vec{m} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_k} \vec{n}$$

$$\partial_{kh}^i = \left\{ \frac{\partial \bar{r}(\vec{a})}{\partial \alpha_k} + \left[\frac{\partial u^i(\vec{a})}{\partial \alpha_k} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ \kappa s \end{matrix} \right\} - \mu^n f_{\kappa s} g^{si} \right] \vec{e}_i \right. \\ \left. + \left[\mu^i f_{\kappa i} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_k} \right] \vec{m} \right\}.$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial \bar{r}(\vec{a})}{\partial \alpha_h} + \left[\frac{\partial u^j}{\partial \alpha_h} + \mu^t \left\{ \begin{matrix} j \\ h t \end{matrix} \right\} - \mu^m f_{ht} g^{tj} \right] \vec{e}_j + \right. \\ \left. + \left[\mu^j f_{hj} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_h} \right] \vec{n} \right\} =$$

al prim'ordine in u :

(6)

$$= g_{hk} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{x})}{\partial \alpha_k} \left[\frac{\partial u^j}{\partial \alpha_h} + u^t \left\{ \begin{matrix} j \\ ht \end{matrix} \right\} - u^n f_{ht} g^{tj} \right] \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_j} \\ + \frac{\partial \bar{F}(\bar{x})}{\partial \alpha_h} \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_k} + u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} - u^n f_{ks} g^{si} \right] \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha_i} =$$

$$= g_{kh} + g_{kj} \left[\frac{\partial u^j}{\partial \alpha_h} + u^t \left\{ \begin{matrix} j \\ ht \end{matrix} \right\} - u^n f_{ht} g^{tj} \right] + \\ + g_{hi} \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_k} + u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} - u^n f_{ks} g^{si} \right] =$$

$$= g_{kh} + g_{kj} \frac{\partial u^j}{\partial \alpha_h} + g_{kj} u^t \left\{ \begin{matrix} j \\ ht \end{matrix} \right\} - u^n f_{ht} g_{kj} g^{jt} + \\ + g_{hi} \frac{\partial u^i}{\partial \alpha_k} + g_{hi} u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} - u^n f_{ks} g^{si} g_{hi} =$$

$$= g_{kh} - 2 u^n f_{kh} + g_{kj} \left[\frac{\partial u^j}{\partial \alpha_h} + u^t \left\{ \begin{matrix} j \\ ht \end{matrix} \right\} \right] + \\ + g_{hi} \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_k} + u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} \right] =$$

$$= g_{kh} - 2 u^n f_{kh} + g_{kj} u^j{}_{||h} + g_{hi} u^i{}_{||k} =$$

$$= g_{kh} - 2 u^n f_{kh} + u_{k||h} + u_{h||k}$$

cioè:

(7)

$$g'_{kh} - g_{kh} = -2\mu^h \frac{p}{T_{kh}} + \mu_{kph} + \mu_{hpk}$$

definisco il tensore γ_h^s con segue

(c'è l'analogo del tensore delle piccole deformazioni della teoria dell'elasticità lineare)

$$g'_{kh} = g_{ks} (\delta_h^s + 2 \gamma_h^s)$$

da cui:

$$g'_{kh} = g_{kh} + 2 g_{ks} \gamma_h^s$$

$$g'_{kh} - g_{kh} = 2 g_{ks} \gamma_h^s$$

$$g^{kq} (g'_{kh} - g_{kh}) = 2 \underbrace{g^{kq} g_{ks}}_{\delta_h^q} \gamma_h^s$$

$$g^{kq} (g'_{kh} - g_{kh}) = 2 \gamma_h^q$$

cioè:

$$\gamma_h^q = \frac{1}{2} g^{kq} (g'_{kh} - g_{kh}) =$$

$$= -\mu^h g^{kq} \frac{p}{T_{kh}} + \frac{1}{2} g^{kq} (\mu_{kph} + \mu_{hpk})$$

$$= -\mu^h \frac{p}{T_h^q} + \frac{1}{2} (\mu^q \sigma_h + \mu_h \sigma^q)$$

Quindi:

(8)

$$g'_{kh} = g_{ks} \left(f_h^s + 2 \gamma_h^s \right)$$

$$\gamma_h^s = -u^m f_h^s + \frac{1}{2} \left(u^s u_h + u_h^{hs} \right)$$

Significato del Tensore γ_h^s :

$$ds' = \sqrt{g'_{ij} dx^i dx^j}$$

(dx^i, dx^j componenti
controvarianti: indici
alti)

$$ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

$$\frac{ds' - ds}{ds} = \frac{\sqrt{g'_{ij} dx^i dx^j} - \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}} =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{is} (f_j^s + 2 \gamma_j^s) dx^i dx^j} - \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}} =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j + 2 g_{is} \gamma_j^s dx^i dx^j} - \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}$$

(9)

$$= \frac{\sqrt{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j} \sqrt{1 + \frac{2g_{is}\gamma_j^s d\alpha^i d\alpha^j}{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}} - \sqrt{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}}{\sqrt{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2g_{is}\gamma_j^s d\alpha^i d\alpha^j}{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}} - 1 \approx$$

$$\approx \sqrt{1 + 2x} - 1 = 1 + x - 1 = x$$

$$\frac{ds' - ds}{ds} = \frac{g_{is}\gamma_j^s d\alpha^i d\alpha^j}{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}$$

$$t^i = \frac{d\alpha^i}{\sqrt{g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}} \leftarrow \text{Versore}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds' - ds}{ds} &= g_{is}\gamma_j^s t^i t^j = \\ &= \gamma_{ij} t^i t^j \end{aligned}$$

γ controlla le variazioni relative di
lunghezze + a.

Variazione del determinante della
matrice cioè variazione dell'elemento
di ora (o misura sulla varietà)

$$g' = \det(g'_{jk})$$

$$g = \det(g_{jk})$$

$$g'_{jk} = g_{js} (\delta_k^s + 2 \delta_k^s)$$

$$\begin{aligned} g' &= \det(g_{js} (\delta_k^s + 2 \delta_k^s)) = \\ &= \det(g_{js}) \det(\delta_k^s + 2 \delta_k^s) = \\ &= g \cdot \det(\delta_k^s + 2 \delta_k^s) \end{aligned}$$

$$\det(I + A) = 1 + \text{tr } A + \dots$$

al primo ordine:

$$g' = g (1 + 2 \text{tr } \delta)$$

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g} \sqrt{1 + 2 \text{tr } \delta}$$

al primo ordine:

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g} (1 + \text{tr } \delta)$$

dove:

(11)

$$\text{tr } \gamma = \gamma^\kappa_\kappa = -u^\alpha \bar{f}_\kappa^\kappa + \frac{1}{2} (u^\kappa_{;\alpha\kappa} + u^\kappa_{;\kappa\alpha})$$

ma

$$\begin{aligned} u^\kappa_{;\alpha\kappa} &= g_{\kappa h} u^{\kappa h}_{;\alpha} = g_{\kappa h} g^{\kappa s} u^h_{;\alpha s} = \\ &= \delta^s_h u^h_{;\alpha s} = u^s_{;\alpha s} \end{aligned}$$

quindi:

$$u^\kappa_{;\alpha\kappa} = u^\kappa_{;\kappa\alpha} \quad \text{allora:}$$

$$\text{tr } \gamma = -u^\alpha \bar{f}_\kappa^\kappa + u^\kappa_{;\alpha\kappa}$$

$$\text{ma } \bar{f}_\kappa^\kappa = g^{\kappa h} f_{\kappa h} = \text{tr}(g^{-1} f) = 2H$$

dove H è la curvatura media della superficie:

$$\boxed{\text{tr } \gamma = -2u^\alpha H + u^\kappa_{;\alpha\kappa}}$$

Variations del versore normale

(12)

$$\vec{M} = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i}$$

$$\vec{M}' = \frac{1}{\sqrt{g'}} \vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 \quad \vec{e}'_i = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \alpha'_i}$$

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \eta_{iab} \frac{\partial x_a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_b}{\partial \alpha_2} ; \vec{h} = M_i \vec{v}_i$$

$$M'_i = \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta'_{iab} \frac{\partial x'_a}{\partial \alpha'_1} \frac{\partial x'_b}{\partial \alpha'_2} ; \vec{h}' = M'_i \vec{v}'_i$$

$\vec{e}$ noto due:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}'(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial \vec{r}(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k} + \left[\frac{\partial u^i(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k} + u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} - u^n f_{ks} g^{s'} \right] \vec{e}_i \\ &+ \left[u^i f_{ki} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_k} \right] \vec{h} \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_a}{\partial \alpha'_1} &= \frac{\partial x_a}{\partial \alpha_1} + \left[\frac{\partial u^r}{\partial \alpha_1} + u^s \left\{ \begin{matrix} s1 \\ r \end{matrix} \right\} - u^n f_{s1} g^{r'} \right] \frac{\partial x_a}{\partial \alpha_r} + \\ &+ \left(\frac{\partial u^n}{\partial \alpha_1} + u^s f_{s1} \right) n_a \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'_b}{\partial \alpha'_2} = \frac{\partial x_b}{\partial \alpha_2} + \left[\frac{\partial u^q}{\partial \alpha_2} + u^t \left\{ \begin{matrix} t2 \\ q \end{matrix} \right\} - u^n f_{t2} g^{q'} \right] \frac{\partial x_b}{\partial \alpha_q} + \left(\frac{\partial u^n}{\partial \alpha_2} + u^t f_{t2} \right) n_b$$

Allora:

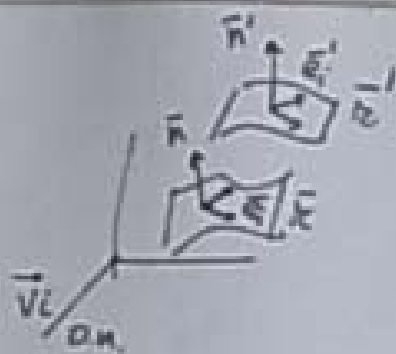
(13)

$$m_i' = \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \frac{\partial x_a'}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_b'}{\partial x_2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \left\{ \frac{\partial x_a}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial u^p}{\partial x_1} + u^s \left\{ \frac{s_1}{p} \right\} - u^r f_{re} g^{er} \right] \frac{\partial x_a}{\partial x_r} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_2} + u^s f_{se} \right) m_a \right\} \left\{ \frac{\partial x_b}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial u^q}{\partial x_2} + u^t \left\{ \frac{t_2}{q} \right\} - u^h f_{he} g^{hq} \right] \frac{\partial x_b}{\partial x_q} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_2} + u^t f_{te} \right) m_b \right\} = \quad (\text{al primo ordine})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \frac{\partial x_a}{\partial x_1} \frac{\partial x_b}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \left[\frac{\partial u^p}{\partial x_1} + u^s \left\{ \frac{s_1}{p} \right\} - u^r f_{re} g^{er} \right] \frac{\partial x_a}{\partial x_r} \frac{\partial x_b}{\partial x_2} \\ + \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \left[\frac{\partial u^q}{\partial x_2} + u^t \left\{ \frac{t_2}{q} \right\} - u^h f_{he} g^{hq} \right] \frac{\partial x_b}{\partial x_q} \frac{\partial x_a}{\partial x_1} + \\ + \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_2} + u^s f_{se} \right) m_a \frac{\partial x_b}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \eta_{iab} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_2} + u^t f_{te} \right) m_b \frac{\partial x_a}{\partial x_1}$$

Si osservi che:



(14)

$$\begin{aligned}
 \eta_{iab} m_a \frac{\partial x_b}{\partial \alpha_i} \vec{v} &= \vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha_i} = \vec{n} \wedge \vec{e}_i = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_i = -\frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{e}_i \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)) = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{e}_i (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) - \vec{e}_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i)] = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{e}_i g_{22} - \vec{e}_2 g_{12}] \quad [a]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{iab} m_b \frac{\partial x_a}{\partial \alpha_i} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_i} \wedge \vec{n} = \vec{e}_1 \wedge \vec{n} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{e}_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) - \vec{e}_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{e}_1 g_{12} - \vec{e}_2 g_{11}] \quad [b]
 \end{aligned}$$

Poi si ha:

(15)

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{quindi: } g^{11} = \frac{g_{22}}{g}; \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}; \quad g^{22} = -\frac{g_{21}}{g}$$

Allora:

$$[a] \rightarrow \eta_{iab} m_a \frac{\partial x_b}{\partial x_1} \vec{V}_i = -\sqrt{g} [\bar{e}_1 g^{11} + \bar{e}_2 g^{12}]$$

$$[b] \rightarrow \eta_{iab} n_b \frac{\partial x_a}{\partial x_2} \vec{V}_i = -\sqrt{g} [\bar{e}_1 g^{12} + \bar{e}_2 g^{22}]$$

quindi:

$$\bar{M}' = \frac{1}{\sqrt{g'}} \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{g'}} \left[\frac{\partial u^p}{\partial x_1} + u^s \left\{ \frac{s_1}{p} \right\} - u^r f_{1r} g^{pr} \right] \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g'}} \left[\frac{\partial u^q}{\partial x_2} + u^t \left\{ \frac{t_2}{q} \right\} - u^h f_{2h} g^{hq} \right] \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 +$$

$$- \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g'}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_1} + u^s f_{1s} \right) [\bar{e}_1 g^{11} + \bar{e}_2 g^{12}] +$$

$$- \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g'}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_2} + u^t f_{2t} \right) [\bar{e}_1 g^{12} + \bar{e}_2 g^{22}]$$

$$\text{ma } \sqrt{g'} = \sqrt{g} (1 + \text{tr } \delta)$$

(16)

$$\text{dove } \text{tr } \gamma = -2 u^\mu H + u^\mu{}_{,\mu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \sim \frac{1}{\sqrt{g}} (1 - \text{tr } \delta) \Rightarrow$$

$$\bar{h}' = \frac{1}{\sqrt{g}} (1 - \text{tr } \delta) \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{g}} (1 - \text{tr } \delta) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + u^s \left\{ \begin{smallmatrix} s+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} - u^\mu f_{\mu 1} g'^{1\mu} \right] \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g}} (1 - \text{tr } \delta) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + u^t \left\{ \begin{smallmatrix} t+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - u^\mu f_{\mu 2} g'^{1\mu} \right] \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$$

$$- (1 - \text{tr } \delta) \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + u^s f_{s1} \right) [\bar{e}_1 g'^{11} + \bar{e}_2 g'^{12}] +$$

$$- (1 - \text{tr } \delta) \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + u^t f_{t1} \right) [\bar{e}_1 g'^{12} + \bar{e}_2 g'^{11}] =$$

$$= \bar{h} - \text{tr } \delta \bar{h} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\overbrace{-2 u^\mu H + u^\mu{}_{,\mu}}^{\text{tr } \gamma} \right] \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 +$$

$$- \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + u^s f_{s1} \right) (\bar{e}_1 g'^{11} + \bar{e}_2 g'^{12}) +$$

$$- \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + u^t f_{t1} \right) (\bar{e}_1 g'^{12} + \bar{e}_2 g'^{11}) =$$

$$= \bar{h} - g^{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + u^s f_{sj} \right) \bar{e}_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{h}' - \bar{h} = - g^{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + u^s f_{sj} \right) \bar{e}_i}$$

Variatione della seconda forma

(17)

Curvatura di una linea con parametro naturale:

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{d^1 \bar{r}}{ds^1} \cdot \frac{d^1 \bar{r}}{ds^1}} \quad \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}(\bar{s}) \\ \bar{s} &= \bar{s}(s) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} = \kappa_{g_i} \bar{e}_i + \kappa_n \bar{n} = \kappa_{g^i} \bar{e}_i + \kappa_n \bar{n}$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{d^1 \bar{r}}{ds^1} \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} = (\kappa_{g^i} \bar{e}_i + \kappa_n \bar{n}) (\kappa_{g^j} \bar{e}_j + \kappa_n \bar{n}) = \\ &= \kappa_{g^i} \kappa_{g^j} g_{ij} + \kappa_n^2 \end{aligned}$$

$$\kappa_n = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \cdot \bar{n} \quad \text{ma} \quad \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \bar{n} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \bar{n} \right) = 0 \quad \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \cdot \bar{n} + \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds} = 0$$

$$\kappa_n = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \cdot \bar{n} = - \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds} =$$

$$= - \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s} = f_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial s}$$

$$\text{Seconda forma:} \quad f_{ij} = - \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \bar{n}$$

$$f'_{KJ} = \frac{\partial^2 \bar{\pi}'}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \cdot \bar{n}'$$

(18)

$$\frac{\partial \bar{\pi}'}{\partial \alpha_K} = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \alpha_K} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_K} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ Ks \end{matrix} \right\} - \mu^n f_{Ks} g^{si} \right] \bar{e}_i +$$

$$+ \left[\mu^i f_{Ki} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_K} \right] \bar{n}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\pi}'}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} = \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_K} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ Ks \end{matrix} \right\} - \mu^n f_{Ks} g^{si} \right] \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_J}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} + \frac{\partial u^s}{\partial \alpha_J} \left\{ \begin{matrix} i \\ Ks \end{matrix} \right\} + \mu^s \frac{\partial}{\partial \alpha_J} \left\{ \begin{matrix} i \\ Ks \end{matrix} \right\} +$$

$$- \frac{\partial \mu^n}{\partial \alpha_J} f_{Ks} g^{si} - \mu^n \frac{\partial f_{Ks}}{\partial \alpha_J} g^{si} - \mu^n f_{Ks} \frac{\partial g^{si}}{\partial \alpha_J} \right] \bar{e}_i +$$

$$+ \left[\mu^i f_{Ki} + \frac{\partial u^n}{\partial \alpha_K} \right] \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha_J} + \left[\frac{\partial \mu^i}{\partial \alpha_J} f_{Ki} + \mu^i \frac{\partial f_{Ki}}{\partial \alpha_J} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \right] \bar{n}$$

$$\bar{n}' = \bar{n} - g^{iJ} \left(\frac{\partial u^n}{\partial \alpha_J} + \mu^s f_{sJ} \right) \bar{e}_i ; \text{ ad prim' ordine } \neq$$

$$f'_{KJ} = \frac{\partial^2 \bar{\pi}'}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \cdot \bar{n}' = \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \bar{n} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_K} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ Ks \end{matrix} \right\} - \mu^n f_{Ks} g^{si} \right] f_{iJ} +$$

$$+ \left[\frac{\partial u^i}{\partial \alpha_J} f_{Ki} + \mu^i \frac{\partial f_{Ki}}{\partial \alpha_J} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \right] +$$

$$- g^{iJ} \left(\frac{\partial u^n}{\partial \alpha_J} + \mu^s f_{sJ} \right) \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial \alpha_K \partial \alpha_J} \bar{e}_i$$

da cui:

19

$$f'_{kj} = f_{kj} + \left[\frac{\partial \mu^i}{\partial x^k} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} - \mu^h f_{ks} g^{si} \right] f_{ij} +$$

$$+ \left[\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} f_{ki} + \mu^i \frac{\partial f_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \mu^h}{\partial x^k \partial x^j} \right] +$$

$$- g^{in} \left(\frac{\partial \mu^h}{\partial x^n} + \mu^s f_{sn} \right) \left\{ \begin{matrix} m \\ kj \end{matrix} \right\} g_{mi} =$$

$$= f_{kj} + \frac{\partial \mu^i}{\partial x^k} f_{ij} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} i \\ ks \end{matrix} \right\} f_{ij} - \mu^h f_{ks} g^{si} f_{ij} +$$

$$+ \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} f_{ki} + \mu^i \frac{\partial f_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \mu^h}{\partial x^k \partial x^j} +$$

$$- g^{in} \underbrace{\frac{\partial \mu^h}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} m \\ kj \end{matrix} \right\} g_{mi}}_{\delta_{kn}^m} - g^{in} \underbrace{\mu^s f_{sn} \left\{ \begin{matrix} m \\ kj \end{matrix} \right\} g_{mi}}_{\delta_{kn}^m} =$$

$$= f_{kj} - \frac{\partial \mu^h}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kj \end{matrix} \right\} + \mu^s \left\{ \begin{matrix} n \\ ks \end{matrix} \right\} f_{kj} - \mu^s \left\{ \begin{matrix} n \\ kj \end{matrix} \right\} f_{sn} +$$

$$+ \frac{\partial \mu^i}{\partial x^k} f_{ij} + \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} f_{ki} + \mu^i \frac{\partial f_{ki}}{\partial x^j} - \mu^h f_{ks} g^{si} f_{ij} + \frac{\partial^2 \mu^h}{\partial x^k \partial x^j}$$

ma Codazzi: $\left\{ \begin{matrix} n \\ ks \end{matrix} \right\} f_{kj} - \left\{ \begin{matrix} n \\ kj \end{matrix} \right\} f_{sn} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x^s} - \frac{\partial f_{ks}}{\partial x^j}$

allora:

(20)

$$\begin{aligned} f'_{kj} = f_{kj} - \frac{\partial \mu^h}{\partial \alpha_h} \left\{ \begin{matrix} R \\ kj \end{matrix} \right\} + \mu^s \frac{\partial f_{kj}}{\partial \alpha_s} + \\ + \frac{\partial \mu^i}{\partial \alpha_h} f_{ij} + \frac{\partial \mu^i}{\partial \alpha_j} f_{ki} - \mu^h f_{hs} g^{si} f_{ij} + \frac{\partial^2 \mu_h}{\partial \alpha_h \partial \alpha_j} \end{aligned}$$

variazioni della seconda forma fondamentale
al primo ordine nella deformazione della
superficie.

Variazioni della curvatura media

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} (g^{-1} f) = \frac{1}{2} g^{kh} f_{hk}$$

$$H' = \frac{1}{2} g'^{kh} f'_{hk} \Rightarrow \Delta H = \frac{1}{2} (g'^{kh} f'_{hk} - g^{kh} f_{hk})$$

calcolo

$$g'^{kh} f'_{hk} \quad \text{dove:}$$

$$g'^{jk} = (g')^{-1}_{jk}; \quad g'_{jk} = g_{js} (\delta_s^k + 2 \gamma_s^k) \Rightarrow$$

$$g' = g (I + 2\gamma) \Rightarrow (g')^{-1} = (I + 2\gamma)^{-1} g^{-1} \approx (I - 2\gamma) g^{-1}$$

$$\Rightarrow g'^{jk} = (\delta_s^j - 2 \gamma_s^j) g^{sk} \quad \text{oppure}$$

$$g'^{kh} = (\delta_s^k - 2 \gamma_s^k) g^{sh}$$

allora:

$$g^{kh} f'_{hk} =$$

$$= (\delta_s^k - 2\gamma_s^k) g^{sh} \left(f_{hk} - \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kh \end{matrix} \right\} + u^n \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_n} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u^i}{\partial x_h} f_{ik} + \frac{\partial u^i}{\partial x_k} f_{hi} - u^n f_{hn} g^{ni} f_{ik} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_h \partial x_k} \right) =$$

$\Rightarrow$ al prim'ordine:

$$= \delta_s^k g^{sh} f_{hk} - 2\gamma_s^k g^{sh} f_{hk} - \delta_s^k g^{sh} \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kh \end{matrix} \right\} + \\ + \delta_s^k g^{sh} u^n \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_n} + \delta_s^k g^{sh} \frac{\partial u^i}{\partial x_h} f_{ik} + \delta_s^k g^{sh} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} f_{hi} + \\ - \delta_s^k g^{sh} u^n f_{hn} g^{ni} f_{ik} + \delta_s^k g^{sh} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_h \partial x_k} =$$

$$= g^{kh} f_{hk} - 2\gamma^{kh} f_{hk} - g^{kh} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kh \end{matrix} \right\} + \\ + g^{kh} u^n \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_n} + g^{kh} \frac{\partial u^i}{\partial x_h} f_{ik} + g^{kh} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} f_{hi} + \\ - g^{kh} u^n f_{hn} g^{ni} f_{ik} + g^{kh} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_h \partial x_k} =$$

$$= g^{kh} f_{hk} - 2\gamma^{kh} f_{hk} - g^{kh} \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kh \end{matrix} \right\} + g^{kh} u^n \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_n} + \\ + g^{kh} \frac{\partial u^i}{\partial x_h} f_{ik} + g^{kh} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} f_{hi} - g^{kh} u^n f_{hn} g^{ni} f_{ik} + g^{kh} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_h \partial x_k}$$

$$g^{ikh} f^{ikh} - g^{kh} f^{kh} =$$

$$= -2\gamma^{kh} f_{hk} - g^{kh} \frac{\partial u^n}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} n \\ kh \end{matrix} \right\} +$$

$$+ u^n g^{kh} \left\{ f_{hkan} + f_{hs} \left\{ \begin{matrix} s \\ ka \end{matrix} \right\} + f_{sk} \left\{ \begin{matrix} s \\ ha \end{matrix} \right\} \right\} +$$

$$+ g^{kh} f_{in} \left\{ u^i_{nh} - u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ sh \end{matrix} \right\} \right\} +$$

$$+ g^{kh} f_{hi} \left\{ u^i_{nk} - u^s \left\{ \begin{matrix} i \\ sk \end{matrix} \right\} \right\} +$$

$$- g^{kh} f_{hn} g^{ni} f_{ik} u^m + g^{kh} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^n \partial x^k}$$

done: $\gamma^s_h = -u^m f^s_h + \frac{1}{2} (u^s_{nh} + u_h{}^{ns})$

$$\gamma^{kh} = g^{ks} \gamma^h_s = g^{ks} \left[-u^m f^h_s + \frac{1}{2} (u^h_{ns} + u_s{}^{nh}) \right] =$$

$$= -u^m f^{kh} + \frac{1}{2} (g^{ks} u^h_{ns} + g^{ks} u_s{}^{nh}) =$$

$$= -u^m f^{kh} + \frac{1}{2} (g^{ks} u^h_{ns} + u^{kh}_{ns}) =$$

$$= -u^m f^{kh} + \frac{1}{2} (g^{ks} u^h_{ns} + g^{hs} u^{ks}_{ns})$$

$$g^{ik} f^{kh} - g^{kh} f^{kh} =$$

(23)

$$= -2 f_{hk} \left[-u^h f^{kh} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{g^{ks} u^h}_{\text{}}_{hs} + \underbrace{g^{hs} u^k}_{\text{}}_{hs} \right) \right] +$$

$$- g^{kh} \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{2} \right\}_{kh} - g^{kh} f_{hn} g^{ni} f_{ik} u^h + g^{kh} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_h \partial x_k} +$$

$$+ u^s g^{kh} \left\{ f_{hks} + \underbrace{f_{hi}}_{\text{}}_{ks} + \underbrace{f_{ik}}_{\text{}}_{hs} \right\} +$$

$$+ g^{keh} f_{ik} \left\{ \underbrace{u^i}_{\text{}}_{nh} - u^s \left\{ \underline{s}^i_h \right\} \right\} +$$

$$+ g^{keh} f_{hi} \left\{ \underbrace{u^i}_{\text{}}_{nk} - u^s \left\{ \underline{s}^i_k \right\} \right\} =$$

$$= 2 f_{hk} u^h f^{kh} + u^s g^{keh} f_{hks} +$$

$$- g^{kh} \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{2} \right\}_{kh} - g^{kh} f_{hn} g^{ni} f_{ik} u^h + g^{kh} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_h \partial x_k}$$

$$\text{ma } g^{kh} f_{hn} g^{ni} f_{ik} = f_{hn}^k f_k^h = g^{sn} f_{snk} g_{in} f^{ki} =$$

$$= \delta_i^s f_{snk} f^{ki} = f_{ik} f^{ki} = f_{hk} f^{kh}$$

$$\text{allora } 2 f_{hk} u^h f^{kh} - g^{kh} f_{hn} g^{ni} f_{ik} u^h = f_{hk} f^{kh} u^h$$

(24)

$$g'^{kh} f'_{kh} - g^{kh} f_{kh} =$$

$$= f_{hk} f^{kh} u^m + u^s g^{kh} f_{hk} //s +$$

$$- g^{kh} \frac{\partial u^h}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ kh \end{matrix} \right\} + g^{kh} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^k \partial x^k}$$

CAVOCOS $g^{kh} \left\{ \begin{matrix} k \\ kh \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$\text{Ricci} \rightarrow g^{kh} //k = 0 \quad \text{ma}$$

$$g^{kh} //k = \frac{\partial g^{kh}}{\partial x^k} + g^{ks} \left\{ \begin{matrix} h \\ sk \end{matrix} \right\} + g^{sh} \left\{ \begin{matrix} k \\ sk \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$- g^{sh} \left\{ \begin{matrix} k \\ sk \end{matrix} \right\} - \frac{\partial g^{kh}}{\partial x^k} = g^{ks} \left\{ \begin{matrix} h \\ sk \end{matrix} \right\}$$

$$\text{ma} \left\{ \begin{matrix} k \\ sk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^s} \Rightarrow$$

$$g^{ks} \left\{ \begin{matrix} h \\ sk \end{matrix} \right\} = - \frac{\partial g^{kh}}{\partial x^k} - g^{sh} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^s}$$

$$\text{poi: } \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sqrt{g} g^{kh} \right\} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x^k} g^{kh} + \sqrt{g} \frac{\partial g^{kh}}{\partial x^k} \right)$$

$$= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} g^{kh} + \frac{\partial g^{kh}}{\partial x^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{ks} \left\{ \begin{matrix} h \\ sk \end{matrix} \right\} = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sqrt{g} g^{kh} \right\}$$

quindi:

25

$$\begin{aligned} g^{kh} f'_{kh} - g^{kh} f_{kh} &= \\ &= f_{hk} f^{kh} u^n + u^s g^{kh} f_{hks} + \\ &+ \frac{\partial u^n}{\partial x_h} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sqrt{g} g^{kh} \right\} + g^{kh} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_h \partial x_k} = \\ &= f_{hk} f^{kh} u^n + u^s g^{kh} f_{hks} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial u^n}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{g} g^{kh} \right] + \sqrt{g} g^{kh} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_h \partial x_k} \right\} = \\ &= f_{hk} f^{kh} u^n + u^s g^{kh} f_{hks} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{g} g^{kh} \frac{\partial u^n}{\partial x_h} \right]}_{\text{Operatore di Laplace-Beltrami} \rightarrow \nabla^2 u^n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int g^{kh} f'_{kh} - g^{kh} f_{kh} &= f_{hk} f^{kh} u^n + u^s g^{kh} f_{hks} + \\ &+ \nabla^2 u^n \end{aligned}$$

Lemma

(26)

$$\boxed{f_{hk} f^{kh} = 4H^2 - 2K}$$

dim 1

Geuss: $(th, st) = f_{rs} f_{th} - f_{rt} f_{sh}$

$$\begin{aligned} g^{2t} g^{sh} (th, st) &= f^{th} f_{th} - f_t^t f_h^h = \\ &= f^{th} f_{th} - (2H) \cdot (2H) \end{aligned}$$

$$g^{2t} \{r^s, st\} = f^{th} f_{th} - 4H^2$$

$$f^{th} f_{th} = g^{2t} g^{sh} (th, st) + 4H^2 =$$

Unique
non
null

$$\begin{aligned} &= g^{12} g^{21} (12, 12) + g^{21} g^{21} (21, 21) + \\ &+ g^{12} g^{22} (12, 21) + g^{21} g^{12} (21, 12) + 4H^2 = \end{aligned}$$

$$= 2 (g^{12})^2 g_K - 2 g^{12} g^{21} g_K + 4H^2 =$$

$$= -2 \det(g^{-1}) g_K + 4H^2 = 4H^2 - 2K.$$

C.v.d. 1.

dim. 2

(27)

$$\begin{aligned} f^{kh} f_{kh} &= g^{ks} g^{ht} f_{st} f_{kh} = \\ &= g^{ks} f_{st} g^{th} f_{tk} = \text{tr} (g^{-1} f g^{-1} f) = \\ &= \text{tr} [(g^{-1} f)^2] = \sum_i \lambda_i [(g^{-1} f)^2] = \\ &= \sum_i [\lambda_i (g^{-1} f)]^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_1)^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 = (2H)^2 - 2K = \\ &= 4H^2 - 2K \end{aligned}$$

c.v.d. 2.

Infine:

$$\begin{aligned} \mu^s g^{kh} f_{hk||s} &= \\ &= \mu^s f_k^k ||_s = \mu^s 2H ||_s = \\ &= \mu^s 2 \frac{\partial H}{\partial s} = 2 \mu^s \frac{\partial H}{\partial s} \end{aligned}$$

infatti:

(28)

$$f_{kh||s} = \frac{\partial f_{kh}}{\partial \alpha_s} - f_{ki} \left\{ \begin{matrix} h s \\ i \end{matrix} \right\} - f_{ih} \left\{ \begin{matrix} k s \\ i \end{matrix} \right\}$$

$$g^{kh} f_{kh||s} = g^{kl} \frac{\partial f_{kl}}{\partial \alpha_s} - g^{kl} f_{ki} \left\{ \begin{matrix} h s \\ i \end{matrix} \right\} - f_{ih} g^{kl} \left\{ \begin{matrix} k s \\ i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\partial \alpha_s} \left\{ g^{kh} f_{kh} \right\} - f_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial \alpha_s} - g^{kl} f_{ki} \left\{ \begin{matrix} h s \\ i \end{matrix} \right\} +$$

$$- f_{ih} g^{kl} \left\{ \begin{matrix} k s \\ i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\partial \alpha_s} \left\{ g^{kh} f_{kh} \right\} - f_{kl} \left\{ \frac{\partial g^{kl}}{\partial \alpha_s} + g^{kn} \left\{ \begin{matrix} l s \\ n \end{matrix} \right\} + g^{lh} \left\{ \begin{matrix} k s \\ n \end{matrix} \right\} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\partial \alpha_s} \left\{ g^{kh} f_{kh} \right\} - f_{kl} \left\{ \overbrace{-g^{kt} \frac{\partial g_{te}}{\partial \alpha_s} g^{eh} + g^{kn} \left\{ \begin{matrix} l s \\ n \end{matrix} \right\} + g^{lh} \left\{ \begin{matrix} k s \\ n \end{matrix} \right\}}^{G(kh,s)} \right\}$$

(Infatti $\ddot{A}^{-1} = -\dot{A}^{-1} \dot{A} A^{-1} \rightarrow$)

$$\text{Ma } \left\{ \begin{matrix} m n \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{rs} \left(\frac{\partial g_{rm}}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial g_{sn}}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial \alpha_s} \right) \Rightarrow$$

$$G = -g^{kt} \frac{\partial g_{te}}{\partial \alpha_s} g^{eh} + g^{kn} \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial \alpha_n} - \frac{\partial g_{ns}}{\partial \alpha_p} \right) +$$

$$+ g^{lh} \frac{1}{2} g^{kb} \left(\frac{\partial g_{bk}}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial g_{bs}}{\partial \alpha_l} - \frac{\partial g_{ls}}{\partial \alpha_b} \right) = 0.$$

Allora si conclude che:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{1}{2} (g^{kh} f'_{kh} - f^{kh} f_{kh}) = \\ &= \frac{1}{2} (f_{kh} f^{kh} u^m + u^s g^{kh} f_{kh/s} + \nabla^2 u^m) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$2\Delta H = (4H^2 - 2K) u^m + u^s 2 \frac{\partial H}{\partial x^s} + \nabla^2 u^m$$

Cioè:

$$\begin{aligned}2\Delta H &= (\nabla^2 + 4H^2 - 2K) u^m + 2u^s H_{,s} = \\ &= (\nabla^2 + 4H^2 - 2K) u^m + 2u^s \frac{\partial H}{\partial x^s}\end{aligned}$$

Variatione della curvatura media
al primo ordine nella deformazione.

Variatione della curvatura gaussiana

(30)

Si ha che $\det A = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2)]$

infatti: $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2]$ quindi:

$$\Delta K = K' - K = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(g^{-1'} f') - \text{tr}((g^{-1'} f')^2)] - K$$

Calcolo separatamente $\text{tr}^2(g^{-1'} f')$ e
 $\text{tr}((g^{-1'} f')^2)$

Calcolo di ①:

dalla proprietà su H si ha:

$$2\Delta H = \underbrace{\text{tr}(g^{-1'} f')}_{2H'} - \underbrace{\text{tr}(g^{-1} f)}_{2H} = (D^2 + 4H^2 - 2K)\mu'' + 2\mu^5 H_{ns}$$

da cui:

$$\text{tr}(g^{-1'} f') = 2H + (D^2 + 4H^2 - 2K)\mu'' + 2\mu^5 H_{ns}$$

$$\text{tr}^2(g^{-1'} f') = 4H^2 + 4H(D^2 + 4H^2 - 2K)\mu'' + 8H\mu^5 H_{ns} \quad ①$$

calcolo di ②:

31

$$\text{tr}[(g^{-1'} f')^2] = \text{tr}[g^{-1'} f' g^{-1'} f'] =$$

$$= g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk} =$$

$$= \underbrace{(\delta_p^k - 2\gamma_p^k)}_{\text{vedi pag. 20}} g^{ph} (f_{hq} + \delta f_{hq}) \underbrace{(\delta_n^q - 2\gamma_n^q)}_{\text{vedi pag. 20}} g^{qs} (f_{sk} + \delta f_{sk})$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Variatione δf (pag. 20) δf (pag. 20) δf (pag. 20)

$$= (g^{kh} - 2\gamma^{kh})(f_{hq} + \delta f_{hq})(g^{qs} - 2\gamma^{qs})(f_{sk} + \delta f_{sk}) =$$

$$= (g^{kh} f_{hq} - 2\gamma^{kh} f_{hq} + g^{kh} \delta f_{hq}) \cdot (g^{qs} f_{sk} - 2\gamma^{qs} f_{sk} + g^{qs} \delta f_{sk}) \quad (\text{al primo ordine})$$

$$= (g^{kh} f_{hq} - 2\gamma^{kh} f_{hq} + g^{kh} \delta f_{hq}) \cdot (g^{qs} f_{sk} - 2\gamma^{qs} f_{sk} + g^{qs} \delta f_{sk}) =$$

$$= g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk} - 2\gamma^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk} + g^{kh} \delta f_{hq} g^{qs} f_{sk} +$$

$$- 2g^{kh} f_{hq} \gamma^{qs} f_{sk} + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \delta f_{sk} =$$

$$= g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk} - 4\gamma^{kh} f_{hq} \gamma^{qs} f_{sk} + 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \delta f_{sk} =$$

$$= \underbrace{g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk}}_{4H^2 - 2K \text{ (lemma p. 26)}} + g^{kh} f_{hq} (2g^{qs} \delta f_{sk} - 4\gamma^{qs} f_{sk})$$

Sostituisco δf_{sk} da pag. 20 e γ^{qs} da pag. 22 (32)

$$\text{tr}[(g^{-1'} f')^2] = 4H^2 - 2K + g^{kh} f_{hk}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ 2g^{qs} \left(-\frac{\partial u^n}{\partial x_n} \{s_k\} + \mu^n \frac{\partial f_{sk}}{\partial x_n} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial u^i}{\partial x_s} f_{ik} + \frac{\partial \mu^i}{\partial x_k} f_{si} - \mu^n f_{si} g^{in} f_{nk} + \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial x_s \partial x_n} \right) + \right. \\ & \quad \left. - 4 \left(-\mu^n f^{qs} + \frac{1}{2} g^{qn} \mu^s_{nn} + \frac{1}{2} g^{sn} \mu^n_{nn} \right) f_{sk} \right\} = \\ & = 4H^2 - 2K + g^{kh} f_{hk}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ 2g^{qs} \left[-\frac{\partial u^n}{\partial x_n} \{s_k\} + \mu^n \left(f_{skn} + f_{si} \{k_n\} + f_{in} \{s_k\} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f_{ik} \left(\mu^n_{ns} - \{s_n\} \mu^p \right) + f_{si} \left(\mu^n_{nk} - \{s_k\} \mu^p \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mu^n f_{si} g^{in} f_{nk} + \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial x_s \partial x_n} \right] + \right. \\ & \quad \left. + 4\mu^n f^{qs} f_{sk} - 2g^{qn} \mu^s_{nn} f_{sk} - 2g^{sn} \mu^n_{nn} f_{sk} \right\} \end{aligned}$$

(33)

$$\begin{aligned}
&= 4H^2 - 2K + 2g^{kh} f_{hq} u^\mu g^{qs} f_{s\mu\kappa} + \\
&\quad - 2g^{kh} g^{qs} f_{hq} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ s\kappa \end{matrix} \right\} + \\
&\quad - 2g^{qs} g^{kh} f_{hq} f_{si}^{(u)} u^\mu g^{in} f_{\mu\kappa} + 4u^\mu g^{kh} f_{hq} f_{s\mu}^{(u)} f_{s\kappa} \\
&\quad + 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 u^\mu}{\partial x^s \partial x^\mu} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\begin{aligned}
(*) &= g^{kh} f_{hq} f^{qs} f_{s\kappa} = g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{si} g^{in} f_{\mu\kappa} = \\
&= \text{tr}[(g^{-1} f)^3] = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) [(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)] = \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2] = \\
&= 2H [(2H)^2 - K - 2K] = \\
&= 2H [4H^2 - 3K] = \\
&= 8H^3 - 6HK
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4H^2 - 2K + 2u^\mu (8H^3 - 6HK) + \\
&\quad + 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{s\mu\kappa} u^\mu - 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ s\kappa \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + \\
&\quad + 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 u^\mu}{\partial x^s \partial x^\mu} \quad (2)
\end{aligned}$$

Allora :

(34)

$$\Delta K = \frac{1}{2} [\textcircled{1} - \textcircled{2}] - K =$$

$$= \frac{1}{2} \left[4H^2 + 4H (\nabla^2 + 4H^2 - 2K) \mu^m + 8H \mu^s H_{||s} + \right. \\ \left. - 4H^2 + 2K - 2\mu^m (8H^3 - 6HK) + \right. \\ \left. - 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk||n} \mu^n + 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mu^n}{\partial x^n} + \right. \\ \left. - 2g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial x_s \partial x_k} \right] - K =$$

$$= 2H \nabla^2 \mu^m + 2HK \mu^m + 4H \mu^s H_{||s}^{(a)} + \\ - g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk||n} \mu^n + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mu^n}{\partial x^n} + \\ - g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial x_s \partial x_k}$$

$$\textcircled{a} + \textcircled{b} = 4H \mu^s H_{||s} - g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{sk||n} \mu^n = \\ = \mu^s [4H \cdot H_{||s} - g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{pk||s}] = \\ = \mu^s [g^{kh} f_{hk} (g^{ij} f_{ji})_{||s} - g^{kh} f_{hq} g^{qs} f_{pk||s}] =$$

(35)

$$= \mu^S \left[\frac{1}{2} \left[(g^{kh} f_{hk})^2 \right]_{||S} - g^{kh} f_{hq} \overset{\text{Ricci}}{\left(g^{qr} f_{rk} \right)_{||S}} \right] =$$

$$\left(\frac{2}{\partial \alpha_S} \text{tr}(A^2) = \text{tr} \left(2 A \frac{\partial A}{\partial \alpha_S} \right) = 2 \text{tr} \left(A \frac{\partial A}{\partial \alpha_S} \right) \right)$$

$$= \mu^S \left[\frac{1}{2} \left[(g^{kh} f_{hk})^2 \right]_{||S} - \frac{1}{2} \text{tr} (g^{-1} f g^{-1} f)_{||S} \right] =$$

$$= \mu^S \frac{1}{2} \left[\text{tr}^2 (g^{-1} f)_{||S} - \text{tr} ((g^{-1} f)^2)_{||S} \right] =$$

$$= \mu^S K_{||S}$$

Quindi:

$$\Delta K = 2HK\mu^n + \mu^S K_{||S} +$$

$$+ 2H\partial^2 \mu^n + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} \Lambda \\ SK \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mu^n}{\partial \alpha_n} - g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial \alpha_S \partial \alpha_K}$$

$$\text{Visto che: } \mu^n_{ns||K} = \frac{\partial^2 \mu^n}{\partial \alpha_S \partial \alpha_K} - \left\{ \begin{matrix} \Lambda \\ SK \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mu^n}{\partial \alpha_n}$$

La ha:

$$\Delta K = 2HK\tilde{\mu} + \mu^3 K_{,rs} + 2H\nabla^2 \mu - g^{kh} f_{kh} g^{rs} \mu_{,rs} K$$

def $\nabla\tilde{\nabla} \mu^n = 2H\nabla^2 \mu^n - g^{kh} f_{kh} g^{rs} \mu_{,rs} K$

Teorema posto $e^{ij} = (f_{ij})^{-1}$ si ha:

$$\nabla\tilde{\nabla} \mu^n = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} K e^{ij} \frac{\partial \mu^n}{\partial x_j} \right)$$

in alternativa dell'operatore di Laplace Beltrami che vale:

$$\nabla^2 \mu^n = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \mu^n}{\partial x_j} \right)$$

Si può quindi scrivere in conclusione:

$$2\Delta H = (\nabla^2 + 4H^2 - 2K) \mu^n + 2\mu^3 H_{,rs}$$

$$\Delta K = (\nabla\tilde{\nabla} + 2HK) \mu^n + \mu^3 K_{,rs}$$

Lemma

(37)

$$g^{kh} f_{kh} g^{st} - g^{th} f_{hq} g^{qs} = K l^{st}$$

dim.

$$\text{tr}(g^{-1} f) g^{-1} - g^{-1} f g^{-1} = K f^{-1}$$

$$\text{tr}(g^{-1} f) g^{-1} f - g^{-1} f g^{-1} f = K I$$

$$\text{anzi } K = \det(g^{-1} f)$$

$$\text{tr}(g^{-1} f) f^{-1} f - (g^{-1} f)^2 = \det(g^{-1} f) I$$

$$\text{pongo } g^{-1} f = A \Rightarrow$$

$$A \text{tr} A - A^2 = \det A \cdot I$$

$$A^2 - A \text{tr} A + \det A \cdot I = 0$$

che è vero per il teorema d.

Caley-Hamilton rifatta:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$$

ma $P_A(A) = 0$ quindi

$$A^2 - A \text{tr} A + \det A \cdot I = 0.$$

c.v.d.

dim del teorema - bisogna verificare che:

(33)

$$2H \nabla^2 u^h - g^{kh} f_{hk} g^{rs} u^h_{,rs} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} K \ell^{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$g^{kh} f_{hk} \nabla^2 u^h - g^{kh} f_{hk} g^{rs} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_s \partial x_k} + g^{kh} f_{hk} g^{rs} \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^h}{\partial x_s} +$$

$$- \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} (g^{kh} f_{hk} g^{st} - g^{th} f_{hk} g^{rs}) \frac{\partial u^h}{\partial x_t} \right) = 0$$

$$g^{kh} f_{hk} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \right) - g^{kh} f_{hk} g^{rs} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_s \partial x_k} + g^{kh} f_{hk} g^{rs} \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^h}{\partial x_s} +$$

$$- \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} g^{kh} f_{hk} g^{st} \frac{\partial u^h}{\partial x_t} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} g^{th} f_{hk} g^{rs} \frac{\partial u^h}{\partial x_t} \right) =$$

oppure e tolgo per completezza la 1° derivata:

$$g^{kh} f_{hk} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{kh} f_{hk}) +$$

$$- g^{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{kh} f_{hk}) - g^{kh} f_{hk} g^{rs} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_s \partial x_k} + g^{kh} f_{hk} g^{rs} \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^h}{\partial x_s} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} g^{kh} f_{hk} g^{st} \frac{\partial u^h}{\partial x_t} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} g^{th} f_{hk} g^{rs} \frac{\partial u^h}{\partial x_t} \right) =$$

Orz si legge l'ultima derivata.

(33)

$$\begin{aligned}
 & -g^{it} \frac{\partial u^a}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_s} (g^{kh} f_{hk}) - g^{kh} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 u^a}{\partial x_s \partial x_k} + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^a}{\partial x_k} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} (g^{th} f_{hq} g^{qs}) \frac{\partial u^a}{\partial x_t} + \frac{1}{\sqrt{g}} g^{th} f_{hq} g^{qs} \frac{\partial^2 u^a}{\partial x_s \partial x_t} = 0 \\
 & -g^{it} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{kh} f_{hk}) + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} (g^{th} f_{hq} g^{qs}) = 0 \quad \forall t
 \end{aligned}$$

uso $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_s} = \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} k \ s \\ k \end{matrix} \right\}$ (Levi-Civita p. 130)

$$\begin{aligned}
 & -g^{it} \frac{\partial g^{kh}}{\partial x_i} f_{hk} - g^{it} g^{kh} \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_s} g^{th} f_{hq} g^{qs} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} (g^{th} f_{hq} g^{qs}) = 0 \quad \forall t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -g^{it} \frac{\partial g^{kh}}{\partial x_i} f_{hk} - g^{it} g^{kh} \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} + \\
 & + \left\{ \begin{matrix} k \ s \\ k \end{matrix} \right\} g^{th} f_{hq} g^{qs} + \frac{\partial g^{th}}{\partial x_s} f_{hq} g^{qs} + g^{th} \frac{\partial f_{hq}}{\partial x_s} g^{qs} + \\
 & + g^{th} f_{hq} \frac{\partial g^{qs}}{\partial x_s} = 0 \quad \forall t
 \end{aligned}$$

Sottrarre il termine con Mainardi-Codazzi:

$$g^{th} g^{qs} \frac{\partial f_{hq}}{\partial x_s} - g^{it} g^{kh} \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} \rightarrow$$

(40)

$$= g^{ti} g^{qs} \frac{\partial f_{iq}}{\partial x_s} - g^{it} g^{kh} \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} =$$

$$= g^{tr} g^{kh} \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_h} - g^{ti} g^{kh} \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} =$$

$$= g^{ti} g^{kh} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_h} - \frac{\partial f_{hk}}{\partial x_i} \right) =$$

$$= g^{ti} g^{kh} \left(\left\{ \begin{matrix} r \\ hk \end{matrix} \right\} f_{ri} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right\} f_{rh} \right)$$

quindi:

$$\begin{aligned} & -g^{it} \frac{\partial g^{kh}}{\partial x_i} f_{hk} + g^{it} g^{kh} \left\{ \begin{matrix} r \\ hk \end{matrix} \right\} f_{ri} - g^{it} g^{kh} \left\{ \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right\} f_{rh} + \\ & + g^{kh} f_{hq} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} ks \\ r \end{matrix} \right\} g^{th} f_{hq} g^{qs} + \frac{\partial g^{th}}{\partial x_s} f_{hq} g^{qs} + \\ & + g^{th} f_{hq} \frac{\partial g^{qs}}{\partial x_s} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{hq} \left\{ -g^{it} \frac{\partial g^{qh}}{\partial x_i} + g^{ht} g^{kp} \left\{ \begin{matrix} q \\ pk \end{matrix} \right\} - g^{it} g^{kh} \left\{ \begin{matrix} q \\ ik \end{matrix} \right\} + \right. \\ & \left. + g^{kh} g^{qs} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} ks \\ r \end{matrix} \right\} g^{th} g^{qs} + g^{qs} \frac{\partial g^{th}}{\partial x_s} + g^{th} \frac{\partial g^{qs}}{\partial x_s} \right\} = 0 \\ & \quad \forall t \end{aligned}$$

Tolgo le derivate dell'inversa di g ($\ddot{A}^{-1} = -A^{-1}\ddot{A}A^{-1}$):

(41)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_a \left\{ + g^{it} g^{as} \frac{\partial g_{sr}}{\partial \alpha_i} g^{rh} + g^{ht} g^{kp} g^{ar} [PK, r] + \right. \\ & - g^{it} g^{kh} g^{ar} [iK, r] + g^{kh} g^{as} g^{tr} [SK, r] + \\ & \left. + g^{th} g^{as} g^{kr} [KS, r] - g^{as} g^{tr} \frac{\partial g_{rp}}{\partial \alpha_s} g^{ph} - g^{th} g^{ar} \frac{\partial g_{rp}}{\partial \alpha_s} g^{ps} \right\} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

$r \rightarrow s$
 $s \rightarrow r$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_a g^{as} \left\{ g^{it} g^{eh} \frac{\partial g_{sr}}{\partial \alpha_i} + g^{ht} g^{kp} [PK, s] - g^{it} g^{kh} [iK, s] + \right. \\ & + g^{kh} g^{tr} [SK, r] + g^{th} g^{kr} [KS, r] - g^{tr} g^{ph} \frac{\partial g_{rp}}{\partial \alpha_s} + \\ & \left. - g^{th} \frac{\partial g_{sr}}{\partial \alpha_s} g^{pr} \right\} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_a g^{as} \left\{ g^{it} g^{eh} [si, r] + g^{it} g^{eh} [ri, s] + g^{ht} g^{kp} [PK, s] + \right. \\ & - g^{it} g^{kh} [iK, s] + g^{kh} g^{tr} [SK, r] + g^{th} g^{kr} [KS, r] + \\ & - g^{tr} g^{ph} [rs, p] - g^{tr} g^{ph} [ps, r] - g^{th} g^{pr} [sr, p] + \\ & \left. - g^{th} g^{pr} [pr, s] \right\} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

(in gaffa $\rightarrow t, s, h$)

C.V.D.

Rieplogo risultati sulla variazione
primo degli elementi di una
superficie bi-dimensionale

42

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) \rightarrow \text{superficie}$$

$$\Delta \bar{r}(\bar{x}) = \mu^i(\bar{x}) \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} + \mu^{\alpha} \bar{n} \rightarrow \text{variazione prima}$$

$$\bar{r}'(\bar{x}) = \bar{r}(\bar{x}) + \Delta \bar{r}(\bar{x})$$

variazione prima forma

$$g'_{kh} = g_{ks} \left(\delta_h^s + 2\gamma_h^s \right)$$

$$\gamma_h^s = -\mu^{\alpha} \Gamma_h^s + \frac{1}{2} \left(\mu_{||h}^s + \mu_h^{||s} \right)$$

$$g' = g (1 + 2\text{tr} \gamma)$$

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g} (1 + \text{tr} \gamma)$$

$$\text{tr} \gamma = -2\mu^{\alpha} H + \mu^k{}_{||k}$$

Variatione del versore normale:

$$\vec{n}' - \vec{n} = -g^{ij} \left(\frac{\partial u^n}{\partial x_j} + u^s f_{sj} \right) \vec{e}_i$$

Variatione della seconda forma

$$\begin{aligned} \delta f_{kj} = f_{kj} &- \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \{ \kappa_j \} + u^s \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_s} + \\ &+ \frac{\partial u^i}{\partial x_k} f_{ij} + \frac{\partial u^i}{\partial x_j} f_{ki} - u^s f_{ks} g^{si} f_{ij} + \\ &+ \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_k \partial x_j} \end{aligned}$$

Variatione curvatura media

$$2\Delta H = (\nabla^2 + 4H^2 - 2K) u^n + 2 u^s H_{ns}$$

Variatione curvatura gaussiana:

$$\Delta K = (\nabla \tilde{\nabla} + 2HK) u^n + u^s K_{ns}$$

STRETCHING (in plane) AND BENDING (out of plane) OF PLATES

For a plane $(x, y) \equiv (x_1, x_2)$ we have:

$$g_{kh} = \delta_{kh}, \quad f_{kh} = 0$$

$$\begin{aligned} g'_{JK} &= \delta_{JS} (\delta_K^S + 2E_K^S) = \\ &= \delta_{JK} + 2E_{JK} \end{aligned}$$

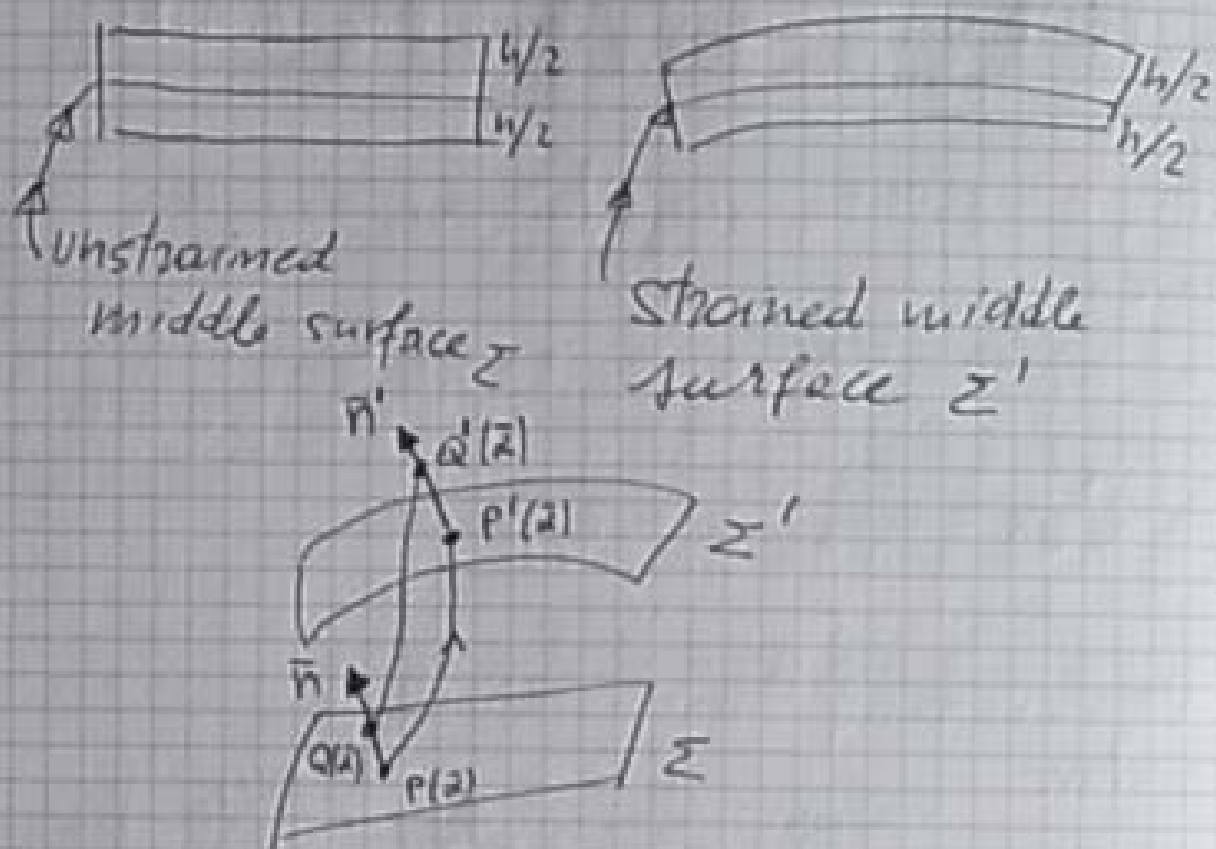
where
$$E_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \quad kh:1,2$$

(we have substituted Γ with E to introduce the elasticity terminology)

Covariant and contravariant indices have the same meaning in this note.

$$\bar{h}' - \bar{h} = -\delta'^{IJ} \frac{\partial u^h}{\partial x_J} \bar{e}_i = -\frac{\partial u^h}{\partial x_i} \bar{e}_i$$

$$\phi'_{kh} - \phi_{kh} = f'_{kh} = \frac{\partial^2 u^h}{\partial x_k \partial x_j}$$



$$P'(\bar{x}) = P(\bar{x}) + u^i \bar{e}_i + u^n \bar{n}$$

$$Q(\bar{x}) = P(\bar{x}) + z \bar{m}(\bar{x})$$

$$Q'(\bar{x}) = P'(\bar{x}) + z \bar{m}'(\bar{x}) + \text{ordini Superiori trascurabili}$$

$$Q'(\bar{x}) = P'(\bar{x}) + z \bar{n}'(\bar{x}) =$$

$$= P(\bar{x}) + u^i \bar{e}_i + u^n \bar{n} + z \bar{n}'(\bar{x}) =$$

$$= Q(\bar{x}) + u^i \bar{e}_i + u^n \bar{n} + z [\bar{n}'(\bar{x}) - \bar{n}(\bar{x})]$$

Three-dimensional displacement:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(\vec{x}, \vec{z}) &= Q'(\vec{x}) - Q(\vec{x}) = \\
 &= u^i \bar{e}_i + u^{\bar{n}} \bar{m} + z [\bar{u}' - \bar{m}] = \\
 &= u^i \bar{e}_i + u^{\bar{n}} \bar{m} - z \frac{\partial u^{\bar{n}}}{\partial x_i} \bar{e}_i = \\
 &= \left(u^i - z \frac{\partial u^{\bar{n}}}{\partial x_i} \right) \bar{e}_i + u^{\bar{n}} \bar{m}
 \end{aligned}$$

where $u^i, u^{\bar{n}} = f(\vec{x}) = f(x, y)$.

$\vec{u}$: three-dimensional displacement

ϵ_{kh} : three-dimensional strain

$$\epsilon_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_h} + \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x_k} \right)$$

$$\begin{cases}
 \bar{u}_1 = u^1 - z \frac{\partial u^{\bar{n}}}{\partial x} \\
 \bar{u}_2 = u^2 - z \frac{\partial u^{\bar{n}}}{\partial y} \\
 \bar{u}_3 = u^{\bar{n}}
 \end{cases}$$

Calcolo F_{kh} in funzione di u^1, u^2, u^3 .

$$\text{Se } k, h \in \{1, 2\} \Rightarrow U_k = u^k - z \frac{\partial u^m}{\partial x_k}$$

$$F_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_h} + \frac{\partial U_h}{\partial x_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_h} \left(u^k - z \frac{\partial u^m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u^h - z \frac{\partial u^m}{\partial x_h} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_h} - z \frac{\partial^2 u^m}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial u^h}{\partial x_k} - z \frac{\partial^2 u^m}{\partial x_k \partial x_h} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_h} + \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \right) - z \frac{\partial^2 u^m}{\partial x_k \partial x_h}$$

$$F_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{\partial u^3}{\partial z} = 0$$

$$F_{13} = F_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(u^1 - z \frac{\partial u^m}{\partial x} \right) + \frac{\partial u^3}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u^m}{\partial x} + \frac{\partial u^3}{\partial x} \right) = 0$$

2. suppose $\hat{T} \vec{n} = 0$ anche dentro
il prisma quindi:

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) \\ T_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \\ T_{12} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12} \end{cases} \quad (\epsilon_{33} \neq 0)$$

$$T_{33} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

cioè:

$$T_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \epsilon_{ij} + \nu \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right]$$

The energy density: $i, j = 1, 2$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^2 \sum_j^2 T_{ij} \epsilon_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \nu \epsilon_{kk} \epsilon_{kk} \right]$$

• Summing up:

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \nu (\text{tr} \mathbf{E})^2 \right]$$

where

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_h} + \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \right) - z \frac{\partial^2 u^m}{\partial x_k \partial x_h}$$

- Variation of median and gaussian curvatures for a deformed plate.

For a plane (initial configuration) we have: $\kappa = 2H = 0$

For a deformed plane we have:

$$2H' = g'^{kh} f'_{hk} = \text{tr}(g'^{-1} f')$$

$$= \left(\delta_{kh} - 2 E_{kh} \right) \frac{\partial^2 u^m}{\partial x_h \partial x_k} =$$

$$= u^m_{,ss} - 2 E_{kh} u^m_{,kh} =$$

$$= \left[\nabla^2 u^m - 2 E_{kh} u^m_{,kh} \right]$$

where $E_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_h} + \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \right) \left(\neq E_{kh} \right)$

$$\begin{aligned}
 [K]' &= \frac{\det f'}{\det g'} = \frac{\det(u''_{kh})}{\det(S_{kh} + 2E_{kh})} = \\
 &= \frac{\det(u''_{kh})}{1 + 2 \operatorname{tr} E} = \boxed{\det(u''_{kh}) (1 - 2 \operatorname{tr} E)}
 \end{aligned}$$

Orz, per matrice 2×2 :

$$(*) \quad \operatorname{tr}(A^2) = (\operatorname{tr} A)^2 - 2 \det A$$

$$\text{Sg} \quad \det A = \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2}$$

$$\text{pongo } C_{kh} = u''_{kh}$$

allora:

$$\begin{aligned}
 K' &= \det C (1 - 2 \operatorname{tr} E) = \\
 &= \frac{(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)}{2} (1 - 2 \operatorname{tr} E) = \\
 &= \frac{(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)}{2} + (\operatorname{tr} C)^2 \operatorname{tr} E - \operatorname{tr}(C^2) \operatorname{tr} E
 \end{aligned}$$

$$2H' = \operatorname{tr} C - 2 \operatorname{tr}(CE)$$

Energy/volume:

47

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \text{tr}(\mathcal{E}^2) + \nu (\text{tr} \mathcal{E})^2]$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} - z \mathcal{C}$$

$$\text{tr}(\mathcal{E}^2) = \text{tr}[(\mathcal{E} - z \mathcal{C})^2] =$$

$$= \text{tr}[\mathcal{E}^2 + z^2 \mathcal{C}^2 - 2z \mathcal{E} \mathcal{C}] =$$

$$= \text{tr}(\mathcal{E}^2) + z^2 \text{tr}(\mathcal{C}^2) - 2z \text{tr} \mathcal{E} \mathcal{C}$$

$$(\text{tr} \mathcal{E})^2 = [\text{tr} \mathcal{E} - z \text{tr} \mathcal{C}]^2 =$$

$$= (\text{tr} \mathcal{E})^2 + z^2 (\text{tr} \mathcal{C})^2 - 2z \text{tr} \mathcal{E} \text{tr} \mathcal{C}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z dz = \left. \frac{z^2}{2} \right|_{-h/2}^{h/2} = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = 2 \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 = 2 \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} =$$

$$= \frac{1}{12} h^3$$

Energy/area:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \left(h \operatorname{tr}(\varepsilon^2) + \frac{h^3}{12} \operatorname{tr}(C^2) \right) + \nu \left(h (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + \frac{h^3}{12} (\operatorname{tr} C)^2 \right) \right]$$

Formulas at 2nd order:

$$K' \equiv \frac{(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)}{2} = \det C$$

$$(2H')^2 \equiv (\operatorname{tr} C)^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \operatorname{tr}(\varepsilon^2) + \nu (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{12} \left[(1-\nu) \operatorname{tr}(C^2) + \nu (\operatorname{tr} C)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \left[(\operatorname{tr} \varepsilon)^2 - 2 \det \varepsilon \right] + \nu (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{12} \left[(1-\nu) \left[(\operatorname{tr} C)^2 - 2 \det C \right] + \nu (\operatorname{tr} C)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(\text{tr } \epsilon)^2 - 2(1-\nu) \det \epsilon \right] + \\
 &+ \frac{1}{24} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left[\underbrace{(\text{tr } c)^2}_{(2H')^2} - 2(1-\nu) \underbrace{\det c}_{K'} \right]
 \end{aligned}$$

Infine posto:

INVARIANTI

$$\begin{cases}
 2J = \text{tr } \epsilon \\
 Q = \det \epsilon \\
 2H = \text{tr } c \\
 K = \det c
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(2J)^2 - 2(1-\nu) Q \right] + \\
 &+ \frac{1}{24} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left[(2H)^2 - 2(1-\nu) K \right]
 \end{aligned}$$

energia per unità di superficie =

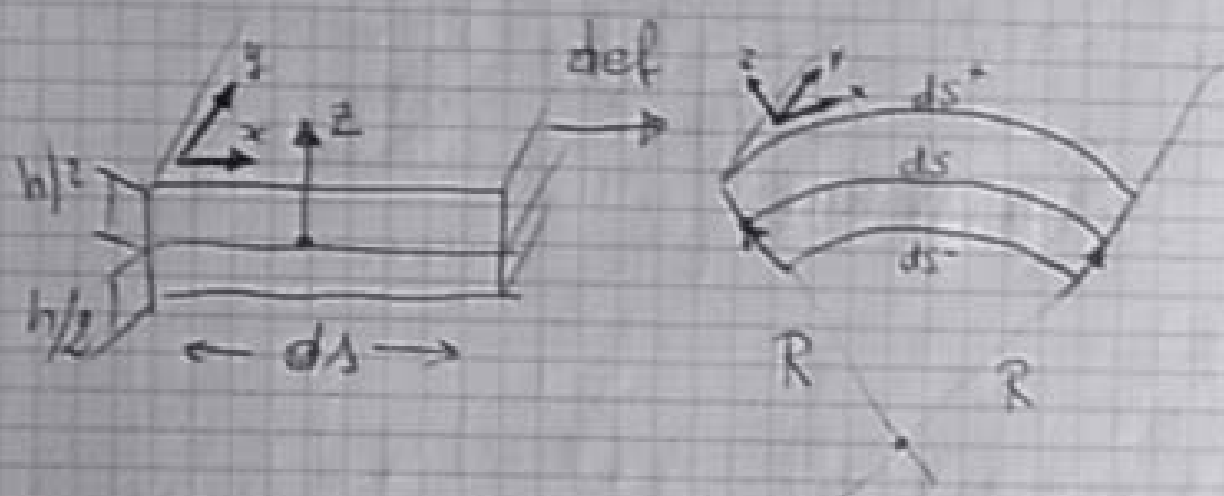
= in-plane strain energy + bending energy.

$f(J, Q)$
 $g(H, K)$

Altra dimostrazione dell'angia distee dipendenti dalle curvature

1° CASO

Deformazione cilindrica



$$\frac{ds^+}{ds} = \frac{R + h/2}{R}$$

$$\frac{ds^-}{ds} = \frac{R - h/2}{R}$$

$$\frac{ds^+ - ds}{ds} = \frac{h}{2R}$$

$$\frac{ds^- - ds}{ds} = -\frac{h}{2R}$$

Se ds' è la lunghezza ad altezza z si ha:

$$\frac{ds'(z) - ds}{ds} = \frac{z}{R}$$

Cioè $E_{xx}(x, z) = \frac{\bar{E}}{R(x)}$ e

tutte le altre componenti E_{ij} sono nulle - Usando la formula in atto di pag 46 si ha

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\bar{E}^2}{R^2(x)} + \nu \frac{\bar{E}^2}{R^2(x)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \bar{E}^2 \frac{1}{R^2(x)}$$

$$U = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \bar{E}^2 \frac{1}{R^2(x)} dz =$$

$$= \frac{1}{24} \frac{E}{1-\nu^2} h^3 \frac{1}{R^2(x)}$$

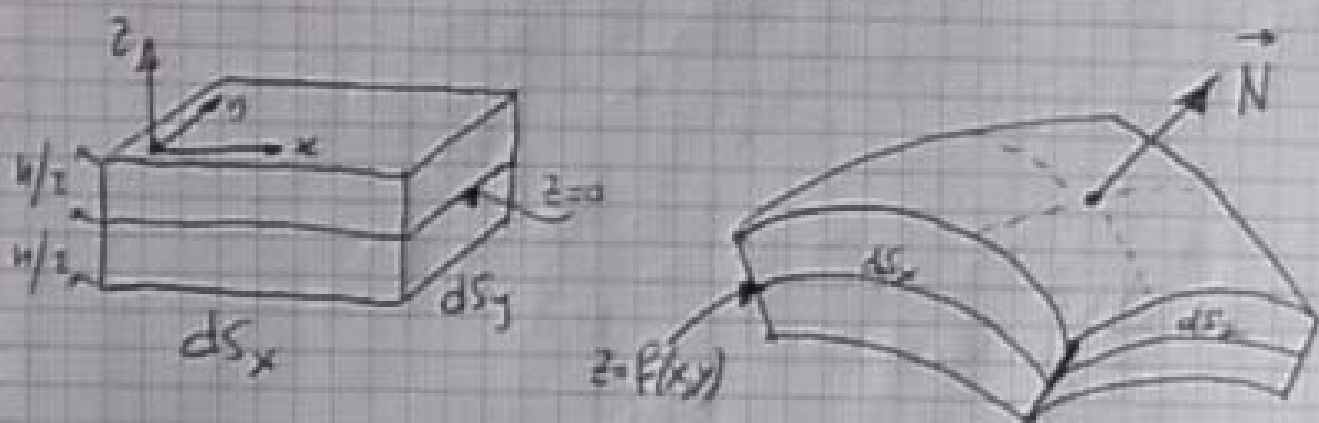
Visto che $R_1 = R(x)$ ed $R_2 = 0$ (all'infinito)

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R(x)} \quad \text{e quindi}$$

$$U = \frac{1}{24} \frac{E}{1-\nu^2} h^3 (2H)^2 \quad \left(\text{con } H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2R(x)} \right)$$

2° caso

deformazione arbitraria: Consideriamo una
piccola parte di membrana elastica.



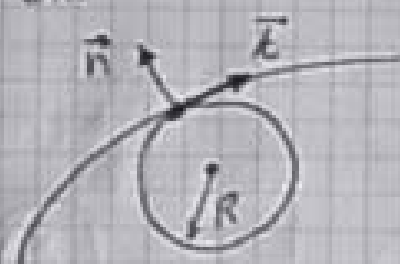
gli assi x e y sono orientati sul piano
Cioè le direzioni principali della superficie
deformata (da la sup. $z=f(x,y)$ si può
in forma parametrica $x=x, y=y, z=f(x,y)$,
e calcolare le forme I' e II' e quindi le
direzioni principali ortogonali e le curvature principali
 K_1 e K_2).

Ora ricordiamo il teorema di HEUSNER.

Data una curva in parametrizzazione
naturale $\vec{r} = \vec{r}(s)$

la curvatura è data da

$$\zeta = \frac{1}{R} = \left\| \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \right\|$$



visto che $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ con

$$\|\vec{t}\| = 1 \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{1}{R} = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\|$$

ma $\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} / \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\|$

(infatti da $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 \rightarrow \frac{d}{ds} \rightarrow \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$)

quindi $\frac{d\vec{t}}{ds} = \zeta \vec{n}$

Prendiamo ora la curva sulla superficie. La curvatura normale è

$$\frac{1}{R_n} = K_n = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \cdot \vec{N} \quad (\vec{N} \text{ normale alla superficie})$$

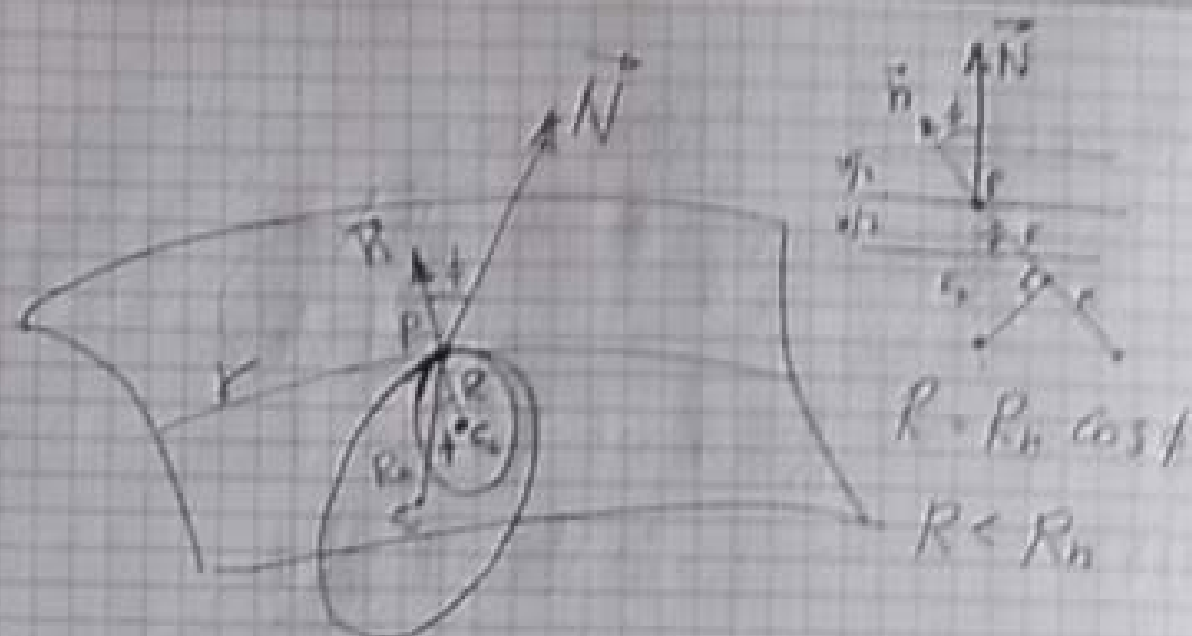
cioè $K_n = \frac{d}{ds} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{N} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{N} = \zeta \vec{N} \cdot \vec{n}$

allora

$$K_n = \zeta \cos \phi$$

dove ϕ = angolo tra $\vec{N}$ ed $\vec{n}$.

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R} \cos \phi \rightarrow R = R_n \cos \phi$$



$$E_{xx} = \frac{E}{R_{n1}} = E K_1 \quad \text{et} \quad E_{yy} = \frac{E}{R_{n2}} = E K_2$$

The centre of curvature C_1 of a curve C in P is the projection on the principal normal of the centre of curvature C_0 of the normal section which is tangent to C at P .

Alors, usando la formula de pag 46 on obti:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) E^2 (K_1^2 + K_2^2) + \nu E^2 (K_1 + K_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{E}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) E^2 (K_1 + K_2)^2 + \nu E^2 (K_1 + K_2)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} z^2 \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu) K_1 K_2 \right] z$$

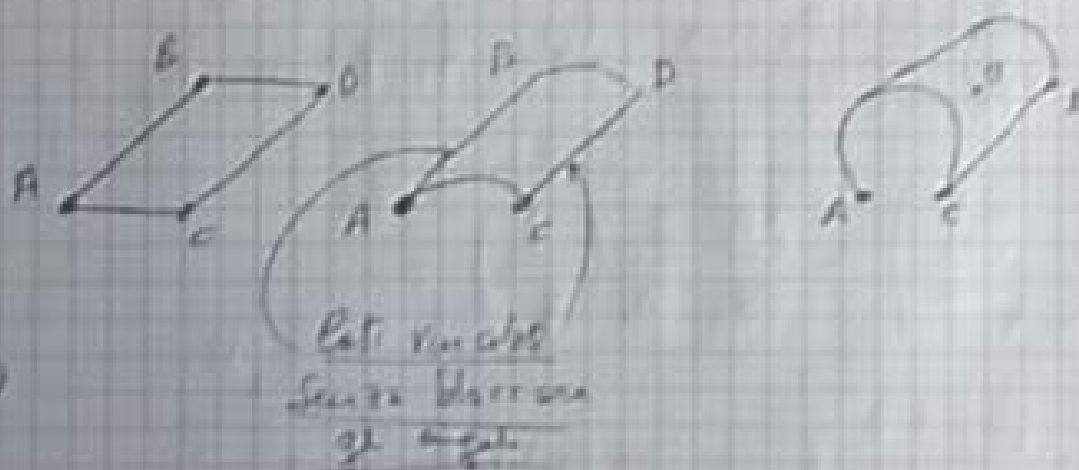
$$= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} z^3 \left[(2H)^2 - 2(1-\nu) K \right]$$

visto che $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \Rightarrow$

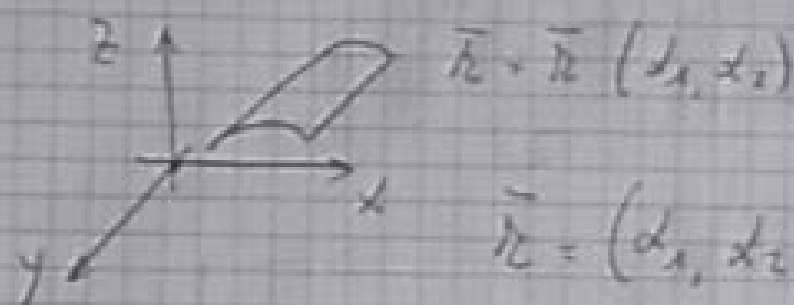
$$M = \frac{1}{24} \frac{E h^3}{1-\nu^2} \left[(2H)^2 - 2(1-\nu) K \right]$$

ESEMPIO CON GEOMETRIA CILINDRICA

Consideriamo un rettangolo e
membrana con bending e senza
stretching:



Supponiamo di bloccare i lati AB e CD
 ad una distanza a - Supponiamo
 che $AC = BD = L$ - la lunghezza
 AB e CD non è rilevante.



$$\vec{r} = (x_1, x_2, z(x_1))$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = (0, 1, 0)$$

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}} \right)$$

$$f_{ij} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \rightarrow \text{Sol } f_{11} \neq 0$$

$$f_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}} \right) = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}} \right) =$$

$$= z'' \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}} \right) + z' \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}} = \frac{z''}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z'^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}f = \begin{pmatrix} \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2H = \text{tr}(g^{-1}f) = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \\ K = 0 \end{cases}$$

Verifica che $2H$ è proprio la curvatura della proiezione sul piano $z-x$.

$$C = \left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial s} \right\|$$

$$\text{dove } A = \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\| dt$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\|}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\|$$

$$C = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\|} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\|} \right) \right\|$$

$$\tilde{\gamma} = (\alpha, 0, z(\alpha)) \rightarrow \tilde{\gamma}' = (1, 0, z')$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t} \right\| = \sqrt{1+z'^2}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \left\| \frac{2}{2x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha, 0, z(\alpha)}{\sqrt{1+z'^2}} \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \left\| \frac{2}{2x} \frac{(1, 0, z')}{\sqrt{1+z'^2}} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \left\| \frac{(0, 0, z'')}{\sqrt{1+z'^2}} + (1, 0, z') \frac{2}{2x} \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \left\| \frac{(0, 0, z'')}{\sqrt{1+z'^2}} + (1, 0, z') \frac{1}{z' \sqrt{1+z'^2}} z' z' z'' \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \sqrt{\frac{1}{1+z'^2} z''^2 + \frac{z'^2 z'^2}{(1+z'^2)^3} (1+z'^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \sqrt{\left(\frac{1}{1+z'^2} + \frac{z'^2}{(1+z'^2)^2} \right) z''^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \sqrt{\frac{1}{z'^2} \left(1 + \frac{z'^2}{1+z'^2} \right) z''^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \sqrt{\frac{1}{1+z'^2} \frac{1}{1+z'^2} z''^2} =$$

$$= \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \quad \text{che coincide con 2H.}$$

la forma soddisfa il problema variazionale

$$\int_0^a (2H)^2 \sqrt{g} \, dx \quad \text{minimo} \quad \text{con il vincolo}$$

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \quad \sqrt{1+z'^2}$$

$$\int_0^a \sqrt{1+z'^2} \, dx = L$$

Cioè:

$$\int_0^a \frac{z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} \, dx \quad \text{min}$$

con vincolo $\int_0^a \sqrt{1+z'^2} \, dx = L$

uso il moltiplicatore λ di Lagrange.

$$\int_0^a \left[\frac{z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} + \lambda \sqrt{1+z'^2} \right] dx$$

minimo libero

con $\int_0^a \sqrt{1+z'^2} \, dx = L$ per fissare λ

Equation d. Euler-Poisson

$$G(z) = \int_0^a F(z, z', z'', x) dx$$

$$dG(z, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(z+dh) - G(z)}{h} = \frac{d}{dz} G(z+dh) \Big|_{h=0}$$

$$G(z+dh) = \int_0^a F(z+dh, z'+dh', z''+dh'', x) dx$$

$$\frac{d}{dz} G(z+dh) \Big|_{h=0} = \int_0^a \frac{d}{dz} F(z+dh, z'+dh', z''+dh'', x) dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial z} h + \frac{\partial F}{\partial z'} h' + \frac{\partial F}{\partial z''} h'' \right] dx = (\text{per parti})$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial z''} \right] h dx + \left[\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \right] h \Big|_0^a + h' \frac{\partial F}{\partial z''} \Big|_0^a = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial z''} = 0}$$

$$z(0) \text{ e } z(a) \text{ fixed} \rightarrow h(0) = h(a) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z'(0) \text{ e } z'(a) \text{ fixed} \rightarrow h'(0) = h'(a) = 0 \\ \text{or} \\ z'(0) \text{ e } z'(a) \text{ free} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z''} = 0 \text{ in } 0 \text{ e } a \end{array} \right.$$

Hamiltoniana associata all'equazione
d. Euler-Poisson

$$q_1 = z, \quad q_2 = z'$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \quad p_2 = \frac{\partial F}{\partial z''}$$

$$\begin{aligned} H &= F - z' p_1 - z'' p_2 = \\ &= F - z' \left(\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \right) - z'' \frac{\partial F}{\partial z''} \end{aligned}$$

Teorema

$$\boxed{\frac{dH}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}}$$

dim

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{dF}{dx} - z'' \left(\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \right) - z' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial z''} \right) \\ &\quad + - z''' \frac{\partial F}{\partial z''} - z'' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \end{aligned}$$

$$= \frac{dF}{dx} - z'' \frac{\partial F}{\partial z'} + z'' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} - z' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} +$$

$$+ z' \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial z''} - z''' \frac{\partial F}{\partial z''} - z' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z' + \frac{\partial F}{\partial z''} z''' +$$

$$- z'' \frac{\partial F}{\partial z'} - z' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial z''} \right) - z''' \frac{\partial F}{\partial z''}$$

$\frac{\partial F}{\partial z}$ per l'equazione
di Euleu-Lagrange

$$= \frac{\partial F}{\partial x}$$

c.v.d

quindi se $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow H = \text{cost}$

(integrale primo dell'energia).

$$F = \frac{z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} + \lambda \sqrt{1+z'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \rightarrow F - z' \left(\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} \right) - z'' \frac{\partial F}{\partial z''} = -C_2$$

(integral primo)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \rightarrow -\frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z''} = C_1$$

(dell'eq. d. Eulero-Poisson)

Quindi:

$$F + z' C_1 - z'' \frac{\partial F}{\partial z''} = -C_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = \frac{2 z''}{(1+z'^2)^{5/2}} \rightarrow z'' \frac{\partial F}{\partial z''} = \frac{2 z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}}$$

$$\frac{z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} + \lambda \sqrt{1+z'^2} - \frac{2 z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} + z' C_1 = -C_2$$

$$-\frac{z''^2}{(1+z'^2)^{5/2}} + \lambda \sqrt{1+z'^2} + z' C_1 = -C_2 \quad *$$

$$\text{Con } \begin{cases} \rightarrow z(0) = 0 & z(a) = 0 \\ \rightarrow z'(0) \in z'(a) \text{ free} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z''} = 0 \text{ in } x=0, a \\ \text{ooc } z''(0) = z''(a) = 0 \\ \rightarrow \int_0^a \sqrt{1+z'^2} dx = L \end{cases}$$

$$\Theta(x): \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \Theta \quad (a)$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta} = \frac{1}{\cos \Theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} \Theta = \frac{\partial}{\partial \Theta} \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \end{aligned}$$

parametro naturale

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta} = \frac{1}{\cos \Theta} \quad (b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial s} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \Theta} \frac{d\Theta}{ds}$$

* diventa:

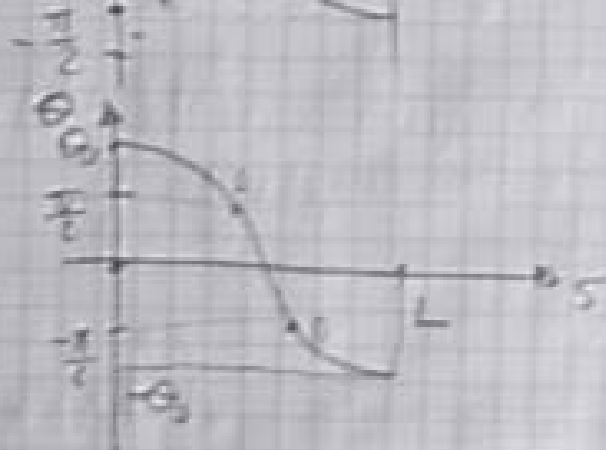
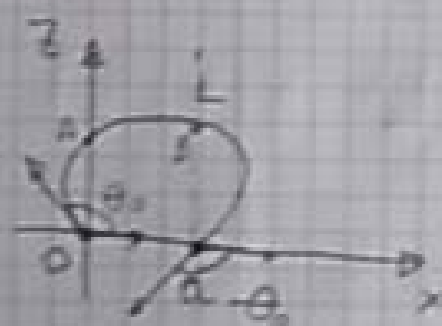
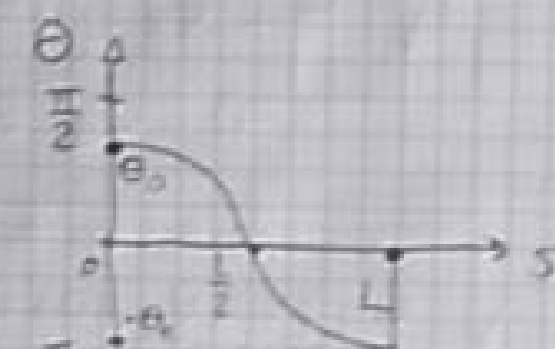
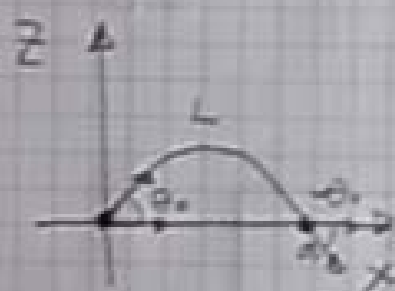
$$-\underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{1}{\cos \Theta} \frac{d\Theta}{ds} \right)^2}_{z''} \underbrace{\cos^5 \Theta}_{\frac{1}{(1+z'^2)^{5/2}}} + \lambda \frac{1}{\cos \Theta} + \operatorname{tg} \Theta C_1 = -C_2$$

$$-\frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \lambda \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} C_1 = -C_2$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \lambda + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta$$

$$z(0) = z(L) = 0$$

$$z'(0) = z'(L) = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{ds} = 0 \text{ for } s=0 \text{ or } s=L$$



$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(L) = -\theta_0$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{\lambda + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta}$$

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{\theta_0} = 0 \rightarrow \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{\theta_0} = -\sqrt{\lambda + C_1 \sin \theta_0 + C_2 \cos \theta_0} = 0$$

$$\lambda = -C_1 \sin \theta_0 - C_2 \cos \theta_0$$

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{-\theta_0} = 0 \rightarrow \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{-\theta_0} = -\sqrt{-C_1 \sin \theta_0 - C_2 \cos \theta_0 + C_1 \sin(-\theta_0) + C_2 \cos(-\theta_0)} = 0$$

$$= -\sqrt{-2C_1 \sin \theta_0} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{C_2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

ortando da fissura $z(0) = z(a) = L$
e la lunghezza L

$$\int_{\theta_0}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{-\sqrt{C_2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \int_0^s ds = s$$

$$s = - \int_{\theta_0}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{C_2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

$$C_2 = C$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\theta(s)}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad [1]$$

57

$S \mapsto \theta$ con due costanti $\theta_0 \in \mathbb{C}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cos\theta} \sin\theta = \tan\theta \\ \frac{dx}{ds} &= \cos\theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &da \\ &(1) = (4) \end{aligned}$$

$$Z = \int_0^z dz = \int_0^s \sin\theta ds = \int_{\theta(s)}^{\theta_0} \frac{\sin\theta d\theta}{-\sqrt{c} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$X = \int_0^x dx = \int_0^s \cos\theta ds = \int_{\theta(s)}^{\theta_0} \frac{\cos\theta d\theta}{-\sqrt{c} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\theta(s)}^{\theta_0} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad [2]$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\theta(s)}^{\theta_0} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad [3]$$

Dz [1] fiss. la lunghezza: $(\theta(L) = -\theta_0)$

$$L = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{L}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$$

$$\boxed{S = L \frac{\int_{\theta(L)}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}} \quad [1]$$

Per imporre θ_0 devo fissare $x(L) = a$

$$a = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$a = L \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}} \quad *$$

$$z = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{a \sin \theta - a \sin \theta_0}}}{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{a \sin \theta - a \sin \theta_0}}} \quad [2]$$

$$x = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{a \sin \theta - a \sin \theta_0}}}{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{a \sin \theta - a \sin \theta_0}}} \quad [3]$$

* fissa θ_0 dati a ed L

[1] fissa $S \leftrightarrow \theta$ (monotona decrescente)

[2 e 3] Sono la rappresentazione parametrica

Converto il tutto a funzioni e/o integrali ellittici - Inizio con * :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+b \cos x}} = \sqrt{\frac{2}{b}} F\left(r, \frac{1}{r}\right)$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{a+b \cos x}} = \sqrt{\frac{2}{b}} \left\{ 2E\left(r, \frac{1}{r}\right) - F\left(r, \frac{1}{r}\right) \right\}$$

$$b \geq |a| > 0 ; \quad 0 \leq x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$r = \arcsin \sqrt{\frac{b(1-\cos x)}{a+b}} ; \quad r = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

$$b = 1$$

$$a = -\cos \theta_0$$

$$b \geq |a| > 0$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 - \cos \theta_0}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \theta_0}} \quad \uparrow \quad \frac{1}{\sin \frac{\theta_0}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$* \rightarrow a = L \cdot \frac{\int_0^{\theta_0} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}{\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}} =$$

$$= L \frac{\sqrt{2} \{ 2E - F \} \Big|_0^{\theta_0}}{\sqrt{2} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 - \cos \theta_0}}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \Big|_0^{\theta_0}} =$$

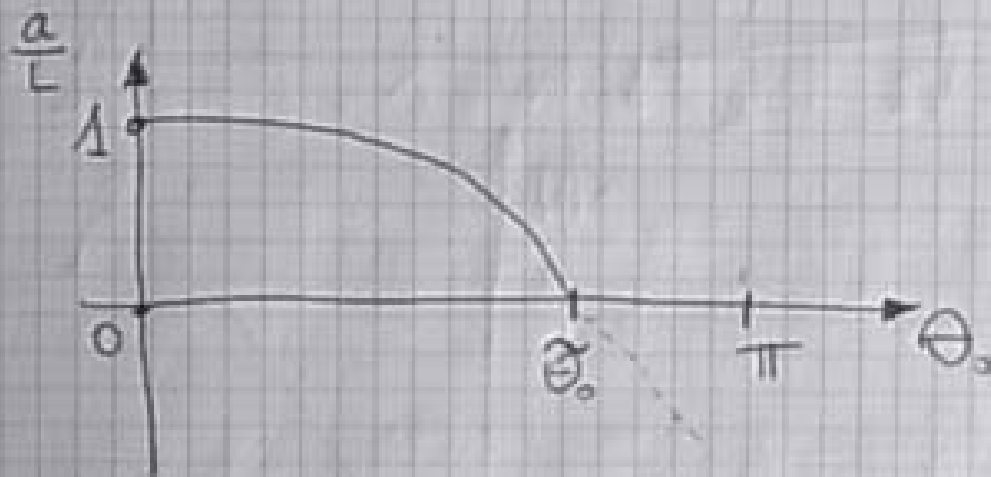
$$= L \frac{\sqrt{2} \{ 2E(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\theta_0}{2}) - F(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\theta_0}{2}) \}}{\sqrt{2} F(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\theta_0}{2})}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) \quad ; \quad F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k)$$

$$a = L \frac{2 E \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - k \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}{k \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

$$\frac{a}{L} = 2 \frac{E \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}{k \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} - 1$$

Angolo θ_0 in funzione di a ed L



$$\tilde{\theta}_0 = 2,2813 \text{ rad} = 130,709^\circ$$

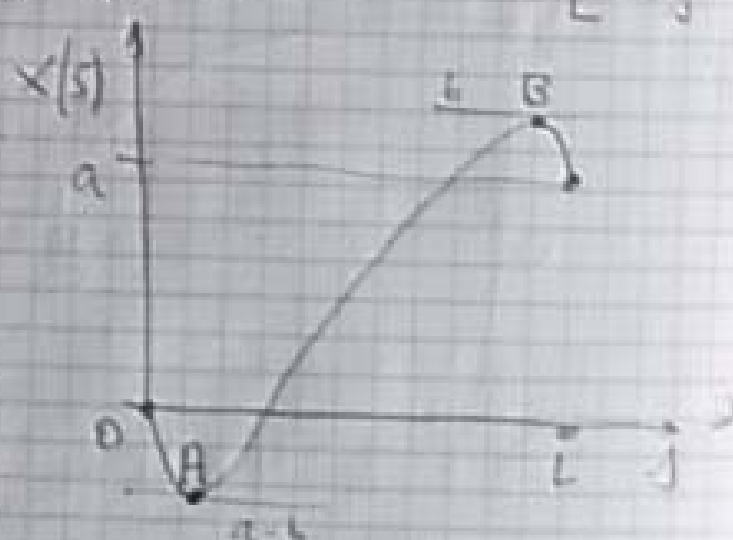
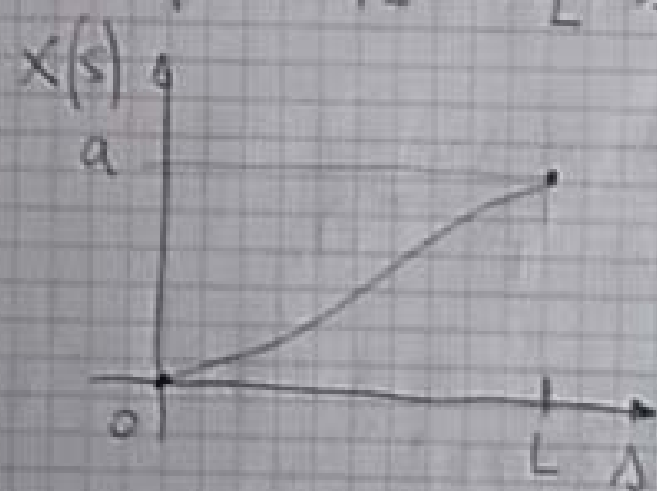
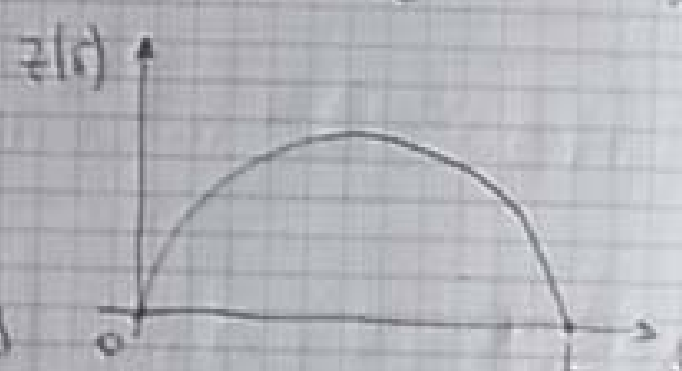
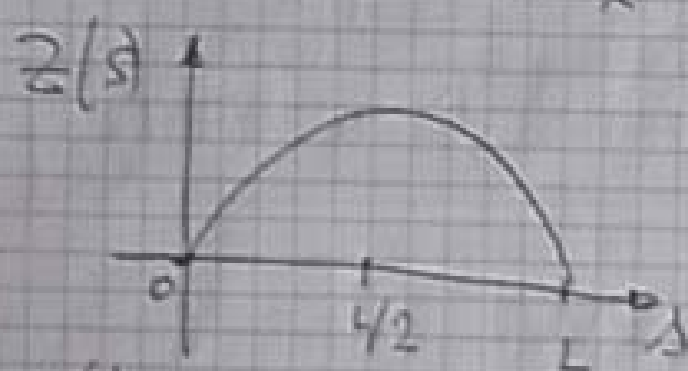
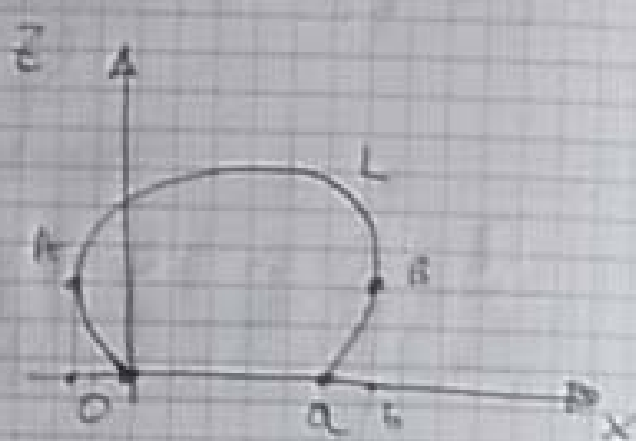
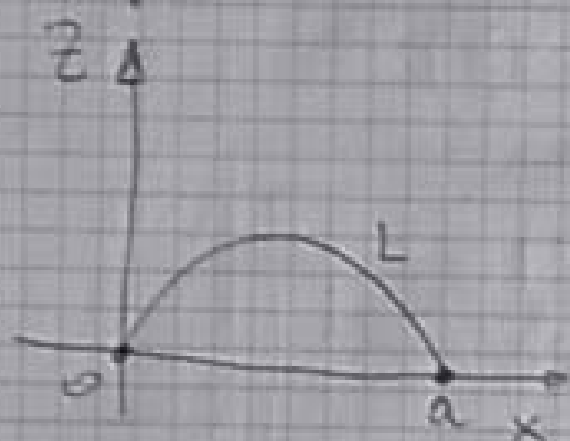
$$\text{se } \frac{a}{L} = 1 \rightarrow \theta_0 = 0$$

$$\text{se } \frac{a}{L} = 0 \rightarrow \theta_0 = \tilde{\theta}_0$$

angolo
universale

$$\left(\begin{array}{l} a \rightarrow 0 \\ \text{aperta} \\ L \rightarrow \infty \end{array} \right)$$

Or, passamos a $Z(s)$ e $X(s)$:



da [1]

$$\Delta = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\theta(s) \sqrt{a_0 \theta - a_1 \theta^2}}}{\int_{a_0}^{a_1} \frac{d\theta}{\sqrt{a_0 \theta - a_1 \theta^2}}} = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\theta(s) \sqrt{a_0 \theta - a_1 \theta^2}}}{2\sqrt{2} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right)}$$

$$\int_{\theta/s}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_{\theta}^0 + \int_0^{\theta_0} = \int_0^{\theta_0} - \int_0^{\theta} =$$

$$= \sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} =$$

$$= \sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - \sqrt{2} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta_0}}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$\Delta = L \frac{K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - F \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta_0}}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right)}{2 K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

$$2K\Delta = LK - LF$$

$$LF = LK - 2K\Delta = K(L - \Delta^2)$$

$$F = K \left(1 - 2 \frac{\Delta}{L} \right)$$

$$F \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta_0}}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right) = K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \left(1 - 2 \frac{\Delta}{L} \right)$$

$$\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta_0}} = \arcsin \left\{ K \left(1 - 2 \frac{\Delta}{L} \right) \right\}$$

amplitude function

$$\sin m = \sin am$$

$$\cos m = \cos am$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta_0}} = \sin \left\{ K \left(1 - 2 \frac{a}{L} \right) \right\}$$

$$(1 - \cos \theta) = (1 - \cos \theta_0) \sin^2 \left\{ K \left(1 - 2 \frac{a}{L} \right) \right\}$$

$$\cos \theta = 1 - (1 - \cos \theta_0) \sin^2 \left\{ K \left(1 - 2 \frac{a}{L} \right) \right\}$$

function $\theta(s)$ explicita

$$[2] \mathcal{L} = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}} =$$

$$= L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}{2\sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta} \frac{-dx}{\sqrt{x - \cos \theta_0}} = \#$$

$x = \cos \theta$
 $dx = -\sin \theta d\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + c$$

$$b = 1, \quad a = -\cos \theta_0$$

$$\# = \int_{\cos \theta}^{\cos \theta} \frac{dx}{\sqrt{x - \cos \theta_0}} = 2 \sqrt{x - \cos \theta_0} \Big|_{\cos \theta_0}^{\cos \theta} =$$

$$= 2 \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \Rightarrow$$

$$E = \int \frac{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}{\sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1 - \cos \theta - (1 - \cos \theta_0) \sin^2 \left\{ K \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right\}}}{\sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{(1 - \cos \theta_0)(1 - \sin^2)}}{\sqrt{2} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{2}}}{K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} \operatorname{cn} \left\{ K \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$E = \int \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} \operatorname{cn} \left\{ K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right\}$$

$$(3) \quad X = L \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}}{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}} =$$

$$= L \frac{\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}}}{2\sqrt{2} K \left(\sin \frac{\vartheta_0}{2} \right)} \quad \checkmark I$$

$$I = \int_{\theta}^{\theta_0} d\vartheta - \int_{\theta}^0 d\vartheta + \int_0^{\theta_0} d\vartheta = \int_0^{\theta_0} d\vartheta - \int_0^{\theta} d\vartheta =$$

$$= \sqrt{2} \{ 2E - K \} - \int_0^{\theta} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}} =$$

$$= \sqrt{2} \{ 2E - K \} - \sqrt{2} \left\{ 2E \left(r, \frac{1}{r} \right) - F \left(r, \frac{1}{r} \right) \right\}_0^{\theta} =$$

$$= \sqrt{2} \{ 2E - K \} - \sqrt{2} \left\{ 2E \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \vartheta_0}}, \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right) + \right. \\ \left. - F \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \vartheta_0}}, \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right) \right\}$$

$$\operatorname{am} \left\{ K \left(1 - 2 \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) \right\}$$

$$X = L \frac{2E - K - \left[2E \left(\sin \left\{ K \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right\}, \sin \frac{\theta_0}{2} \right) - K \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right]}{2K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

$$= L \frac{2E - \cancel{K} - 2E \left(\sin, \sin \frac{\theta_0}{2} \right) + \cancel{K} - 2K \frac{1}{L}}{2K} =$$

$$= L \frac{2E - 2K \frac{1}{L} - 2E \left(\sin, \sin \frac{\theta_0}{2} \right)}{2K} =$$

$$= L \frac{E - K \frac{1}{L} - E \left(\sin, \sin \frac{\theta_0}{2} \right)}{2K} \Rightarrow$$

$$X = L \frac{E \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{1}{L} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - E \left\{ \sin \left[K \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right], \sin \frac{\theta_0}{2} \right\}}{K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

$$X = L \frac{E \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) - E \left\{ \sin \left[K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \left(1 - 2 \frac{1}{L} \right) \right], \sin \frac{\theta_0}{2} \right\}}{K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)} - 1$$