

Indice

Luglio 1995

0

- 1 - Equazioni del moto di Lagrange
 - caso generale con Q_k
 - caso conservativo con L
- 8 - Forma matematica delle equazioni
 - forme dell'energia cinetica
 - forme generali conservative
 - forma conservativa scleronoma.
 - equilibrio
- 11 - Integrali primi di Jacobi
 - conservativo reonoma
 - conservativo scleronoma.
- 16 - Teorema di Noether
- 22 - Problema dei due corpi
- 25 - Potenziali dipendenti delle velocità.
- 27 - Formule di Poisson
- 31 - Teorema di Liouville.
- 32 - Metrica hamiltoniana e simplettiche.
- 35 - Trasformazioni
- 37 - Parentesi di Poisson
- 42 - Stabilità e piccoli oscillazioni.
- 48 - Principi Variazionali
- 52 - Equazioni di Hamilton-Jacobi
- 59 - Equazioni di Liouville

• EQUAZIONI DEL MOTO DI LAGRANGE

Consideriamo un sistema di N punti materiali che può essere descritto in un riferimento inerziale dei vettori posizione $\underline{r}_1 \dots \underline{r}_N$; poniamo per comodità

$(\underline{r}_1 \dots \underline{r}_N) \triangleq \underline{x}$. Ogni particella ha inoltre velocità $\dot{\underline{r}}_j \triangleq \underline{v}_j$ ed accelerazione $\ddot{\underline{r}}_j = \dot{\underline{v}}_j \triangleq \underline{a}_j$.

Il sistema di particelle è sottoposto a p vincoli olonomi generici eventualmente dipendenti dal tempo. 'Olonomo' significa 'legge intera' cioè senza derivate e quindi sono vincolate tra loro solo le posizioni delle particelle in un dato istante.

Le equazioni dei vincoli sono:

$$\boxed{f_j = f_j(\underline{x}, t) = 0 \quad \forall j = 1..p \quad [1]}$$

Nel qual caso si ha $\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad \forall j = 1..p$ allora il sistema è detto scleronomo.

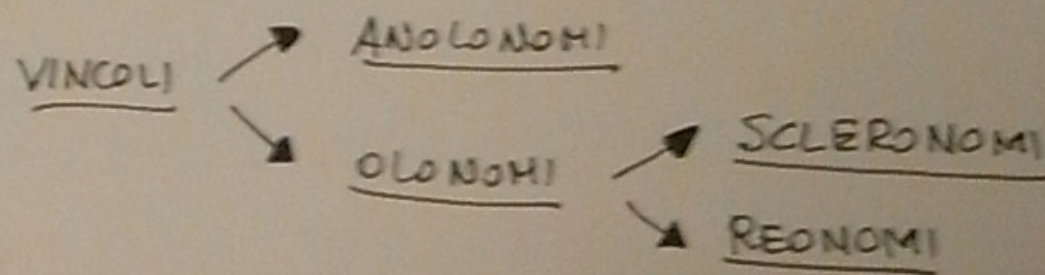
Se invece $\frac{\partial f_j}{\partial t} \neq 0$ per almeno un valore dell'indice j allora il sistema è reonomo.

Non si considerano qui vincoli le cui equazioni contengano derivate delle posizioni cioè in generale del tipo:

$$\tilde{f}_J = \tilde{f}_J(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = 0 \quad \forall J = 1 \dots q \quad [2]$$

Essi sono detti anolonomi.

Una ideale rappresentazione della classificazione dei vincoli è quindi il seguente:



Noi ci limitiamo a vincoli del tipo [1]. In generale quindi saranno 2 nomi ma i vincoli potranno facilmente essere specificati per i vincoli scleronomi. La presenza delle equazioni [1] fa sì che le componenti del vettore $\underline{x}$ di dimensione $3N$ non siano tutte indipendenti fra loro. In particolare sono necessarie $3N - p = m$ tra esse per poter determinare anche le altre. m è detto numero di

grad. d. libertà del sistema.

Dati $x_1 \dots x_n$ e t li possiamo trovare

$x_{n+1} \dots x_m$ sempre all'istante t .

(Questo con l'ipotesi che $\frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(x_{n+1} \dots x_m)}$ abbia

caratteristica minima) $\Rightarrow (x_{n+1} \dots x_m) = h(x_1 \dots x_n, t)$.

Per generalità li penso come n parametri

$q \dots q_n$ quindi $x_1 \dots x_n$ per la descrizione globale del sistema. Li avrò:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(q, t) \\ \rho \left[\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{q}} \right] &= n \end{aligned}$$

Cioè la matrice $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{q}}$ di dimensione $3n \times n$ deve avere caratteristica minima.

Li può allora scrivere

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

$\frac{d\underline{x}}{dt}$ = velocità effettive delle particelle.

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{q}}$ = Matrice Jacobiana; $\dot{\underline{q}}$ = velocità generalizzate.

Oltre all'aspetto relativo all'elonomia dei vincoli bisogna studiare anche quello relativo alle presenze di attriti e usuro.

Supponiamo adesso un vincolo fermo.
 Una particella su cui non risulti di attrito
 la cui velocità è ortogonale alla reazione
 vincolare. Se il vincolo è in moto
 per effettuare lo stesso ragionamento bisogna
 introdurre la velocità virtuale del punto
 cioè la differenza di due velocità effettive
 diverse entrambe concerne del vincolo. In
 tali casi l'assenza di attrito si traduce in
 ortogonalità tra reazione vincolare e velocità
 virtuale. In generale per un sistema di
 N particelle questo fatto è sintetizzato per
 mezzo del postulato delle reazioni vincolari.
 Considerare vero tale assioma significa
 effettuare le scelte di vincoli.erci.
 Per ogni particella l'eq. del moto è:

$$\underline{F}_i + \underline{\Phi}_i = m_i \underline{a}_i \quad \text{dove}$$

$\underline{F}_i$ è la forza proveniente dall'esterne e
 $\underline{\Phi}_i$ è la reazione vincolare. m_i è la
 massa inerziale della particella.

Il postulato delle reazioni vincolari dice:

5

$$\sum_{i=1}^N \underline{\Phi}_i \cdot \underline{v}_i = 0$$

dove $\underline{v}_i = \underline{v}_i^{[1]} - \underline{v}_i^{[2]}$ con

$\underline{v}_i^{[1]}$ e $\underline{v}_i^{[2]}$ velocità consentite diverse tra loro.

L'introduzione delle velocità virtuali serve per eliminare la velocità del vincolo.

È da porre di conseguenza:

$$\begin{cases} \underline{v}_i^{[1]} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_k} \dot{q}_k^{[1]} + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \\ \underline{v}_i^{[2]} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_k} \dot{q}_k^{[2]} + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \end{cases}$$

Tale posizione comporta la semplificazione di $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$ nella differenza:

$$\sum_{i=1}^N \underline{\Phi}_i \cdot \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_k} (\dot{q}_k^{[1]} - \dot{q}_k^{[2]}) \right] = 0$$

cioè:

$$\left[\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^N (\underline{F}_i - m_i \underline{a}_i) \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_k} \right] (\dot{q}_k^{[1]} - \dot{q}_k^{[2]}) \right] = 0$$

Ora visto che le $\underline{q}_k$, e quindi le $\dot{q}_k$, sono arbitrarie e indipendenti si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N (\underline{F}_i - m_i \underline{\ddot{z}}_i) \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k = 1..n$$

h' sono quindi ottenute n equazioni differenziali nelle coordinate generalizzate q_k .

Si pone
$$Q_k = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \quad \text{ed esse}$$

valgono delle forze generalizzate -

Bisogna ormai elaborare le equazioni

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{\ddot{z}}_i \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} = Q_k \quad \forall k = 1..n$$

A tale scopo dimostreremo due utili relazioni:

1)
$$\frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{essendo } \underline{z}_i = \underline{z}_i(q, t) \text{ e } \underline{v}_i = \underline{v}_i(q, \dot{q}, t)$$

Infatti:
$$\underline{v}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial t}(q, t)$$

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_j} \quad \text{Somme soignée sur } k. \quad \square$$

2)
$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \quad \square$$

Allora si sviluppano le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad \text{dove } T \triangleq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

l. eq. del moto di Lagrange sono allora:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k} \quad \forall k=1 \dots n.$$

In tale modo sono state eliminate dalle equazioni le reazioni vincolari.

Il numero di sinistra dipende solo dall'energia cinetica del sistema. Il numero di destra delle forze esterne. L'unica ipotesi fino ad ora è quello di usare vincoli olonomi (liberi/scleronomi o reonomi) -

Introduciamo ora l'ipotesi dell'esistenza di un potenziale per le forze esercitate sul sistema cioè una funzione $U(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N)$

talché $\underline{F}_i = -\nabla_{\underline{r}_i} U(\underline{r}_1 \dots \underline{r}_N) = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i}$

Con tale ipotesi il sistema viene detto conservativo e le forze generalizzate si esprimono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

però $\boxed{L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q)}$ si ha

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \forall k=1..n$$

avendo osservato che $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \forall q_k$ -
 L viene detta Lagrangiana del sistema conservativo. Se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ il sistema è scleronomo altrimenti è reonomo.

FORMA MATEMATICA DELLE EQUAZIONI

Osserviamo preliminarmente le forme matematiche dell'energia cinetica:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right)$$

Con alcune sottintese su k, j quindi:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2} a_{kj}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_j + a_k(q, t) \dot{q}_k + a_0(q, t)$$

$$\text{dove} \begin{cases} a_{kj}(q, t) \triangleq \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \\ a_k(q, t) \triangleq \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \\ a_0(q, t) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \end{cases}$$

h. per inoltre $T = T_2(q, \dot{q}, t) + T_1(q, \dot{q}, t) + T_0(q, t)$

$$\text{dove} \begin{cases} T_2(q, \dot{q}, t) \triangleq \frac{1}{2} a_{kj}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_j \\ T_1(q, \dot{q}, t) \triangleq a_k(q, t) \dot{q}_k \\ T_0(q, t) \triangleq a_0(q, t) \end{cases}$$

Teorema: la matrice $a_{kj}(q, t)$ è simmetrica definita positiva $\forall (q, t)$ quindi è anche invertibile.

la dimostrazione è ovvia.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{iJ}(q,t) (\delta_{ki} \ddot{q}_J + \ddot{q}_k \delta_{iJ}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{iJ}(q,t) \ddot{q}_J + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{ki}(q,t) \ddot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{ji}(q,t) \ddot{q}_J + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{ki}(q,t) \ddot{q}_k = \\ &= \mathcal{L}_{ji}(q,t) \ddot{q}_J \\ \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} &= \mathcal{L}_i(q,t) \delta_{ki} = \mathcal{L}_i(q,t) \\ \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} &= 0 \quad \text{ed allora} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{L}_{ji}(q,t) \ddot{q}_J + \mathcal{L}_i(q,t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{ji}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}_{ji}}{\partial t} \right) \ddot{q}_J + \mathcal{L}_{ji} \ddot{q}_J + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{iJ}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_J + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

allora le equazioni del moto si riscrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{ji}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_J + \frac{\partial \mathcal{L}_{ji}}{\partial t} \dot{q}_J + \mathcal{L}_{ji} \ddot{q}_J + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial t} &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{iJ}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_J + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \end{aligned}$$

cioè:

11

$$\ddot{q}_J = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \partial_{kJ}}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{iJ}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \dot{q}_J + \left(\frac{\partial \partial_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial \partial_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial \partial_0}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

per l'esistenza dell'inversa di ∂_{iJ} si ha:

$$\sum_{i=1}^n \partial_{iJ}^{-1}(q,t) \partial_{iJ}(q,t) = \delta_{JJ} \quad \text{cioè} \quad \partial_{iJ}^{-1} \partial_{iJ} = \delta_{JJ}$$

$$\partial_{iJ}^{-1} \ddot{q}_J = \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \partial_{kJ}}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{iJ}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \dot{q}_J + \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{\partial \partial_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial \partial_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{\partial \partial_0}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)$$

$$\ddot{q}_e = b_{kJ}^e \dot{q}_k \dot{q}_J + b_k^e \dot{q}_k + b^e$$

dove

$$\begin{cases} b_{kJ}^e(q,t) = \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \partial_{kJ}}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{iJ}}{\partial q_k} \right) \\ b_k^e(q,t) = \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{\partial \partial_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial \partial_i}{\partial q_k} \right) \\ b^e(q,t) = \partial_{iJ}^{-1} \left(\frac{\partial \partial_0}{\partial q_i} - \frac{\partial \partial_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \end{cases}$$

però $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ si ha $\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}, t)$ e quindi per un noto teorema di esistenza e unicità si assicura che le eq. di Lagrange sono formulate correttamente.

Questo significa che fissate le posizioni
generalizzate iniziali e le velocità generalizzate
iniziali è prevedibile almeno in linea di
principio tutto il modo futuro del sistema.
Andiamo più dettagliatamente del caso scleronomico:

In tale caso si ha evidentemente $\dot{a}_k = 0 \forall k$
ed $\dot{a}_0 = 0$ quindi le eq. del moto diventano:

$$2_{ij} \ddot{q}_j = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial 2_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

h. ha anche $2_{ij} = 2_{ji}(q)$

$\frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k}$ è una matrice di indici $(k, j) \forall i = 1 \dots n$.

Il generale non è simmetrica e si può

scrivere:

$$\frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j = \frac{\partial 2_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Infatti gli indici k e j sono 'muti' ed allora:

$$\frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial 2_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \Rightarrow$$

$$2_{ij} \ddot{q}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial 2_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial 2_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Introducendo il 1° simbolo di Christoffel : 13

$$\left[\begin{smallmatrix} K & J \\ i \end{smallmatrix} \right] = \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_K} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial q_J} - \frac{\partial^2 a_{KJ}}{\partial q_i} \right) \frac{1}{2} = \left[\begin{smallmatrix} J & K \\ i \end{smallmatrix} \right]$$

si ottiene:

$$a_{ij} \ddot{q}_j + \left[\begin{smallmatrix} K & J \\ i \end{smallmatrix} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Moltiplicando per $a_{li}^{-1} \Rightarrow$

$$\ddot{q}_l = \frac{1}{2} a_{li}^{-1} \left(\frac{\partial^2 a_{KJ}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_K} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial q_J} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j - a_{li}^{-1} \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Introducendo il secondo simbolo di Christoffel:

$$\ddot{q}_l + \left\{ \begin{smallmatrix} K & J \\ e \end{smallmatrix} \right\} \dot{q}_J \dot{q}_K = - a_{li}^{-1} \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

con

$$\left\{ \begin{smallmatrix} K & J \\ e \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} a_{li}^{-1} \left(- \frac{\partial^2 a_{KJ}}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_K} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial q_J} \right) = a_{li}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} K & J \\ i \end{smallmatrix} \right]$$

Le definizioni dei simboli di Christoffel derivano dalle geometrie differenziali dove sono usati nel problema delle geodetiche.

In questo caso scleronomo i punti
di equilibrio sono detti da $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i=1..n.$
Essi rappresentano le soluzioni costanti
delle eq. del moto.

Tornando ora alla generalità nel caso
generale ronomo si ha per
i punti d'equilibrio:

$$\left[\frac{\partial D}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = 0$$

Infatti le eq. del moto generale
sono:

$$2_{ij} \ddot{q}_j + \left[\begin{matrix} k & j \\ i \end{matrix} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial D}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Si vede che se $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ restano solo i
tre ultimi termini. L'equazione # ha
significato di equilibrio relativo al moto del
vincolo.

INTEGRALE PRIMO DI JACOBI

Consideriamo ora una formula
importante sempre valida nel caso
conservativo.

Siamo nelle ipotesi:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k = 1 \dots n.$$

Calcoliamo la derivata Totale della Lagrangiana rispetto al Tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dL(q, \dot{q}, t)}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{ma} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k \Rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left\{ L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right\} = \frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\text{Se } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \triangleq H} \text{ si conserva.}$$

H si chiama Hamiltoniana del sistema e

$$\text{si ha: } \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{dH}{dt}}$$

L'Hamiltoniana in generale si può scrivere così: 16

$$H = \frac{\partial(T_2 + T_1 + T_0 - U)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} =$$
$$= (2k_i \dot{q}_i + 2k) \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T_2 + T_1 - \mathcal{L} =$$
$$= 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + U = T_2 + U - T_0$$

$$H = T_2 + U - T_0$$

Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ ma il vincolo non è scleronomo
non ha la conservazione di $H = T_2 + U - T_0$

Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ perché il vincolo è scleronomo allora
si hanno le relazioni $T_0 = 0$ e $T_1 = 0$
quindi si conserva $H = T_2 + U = T + U$
che rappresenta la conservazione
dell'energia meccanica cinetica
più potenziale.

IPOTIZZAZIONE HAMILTONIANA DELLE EQ. DEL MOTO

Sempre nelle ipotesi $\mathcal{L} = T(q, \dot{q}, t) - U(q)$

e $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ si vuole trovare un

modo di passare ad un sistema del
1° ordine di 2n eq. in 2n incognite.

Introduciamo il teorema di Darboux sulle
trasformazioni di Legendre: 17

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^m$ e $f(x, z): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}(x, z): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; y \in \mathbb{R}^n$$

Da $y = y(x, z)$ si esegue l'inversione di posto

o $x = x(y, z)$; si pone:

$$g(y, z) = f(x(y, z), z) - x(y, z) \cdot y$$

dove l'ultimo moltiplicatore indica un
prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.

Il teorema afferma che:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Vediamo invece come si possono usare
tal. trasformazioni di Legendre per la
riduzione a forma normale delle equazioni
di Lagrange.

Sia $x = \dot{q}$ e $z = (q, t)$ quindi
 $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^m$ con $m = n + 1$.

è sic la Lagrangiana:

18

$$L(\dot{q}, (q, t)) = f(x, z)$$

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) \text{ diventa } p = \frac{\partial L(\dot{q}, (q, t))}{\partial \dot{q}}$$

p sono n variabili dette momenti canonici -
il vettore $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ è detto vettore delle
variabili canoniche coniugate.

Dalle relazioni $p = p(\dot{q}, (q, t))$ cioè
 $y = y(x, z)$ si trova $\dot{q} = \dot{q}(p, (q, t))$ cioè
 $x = x(y, z)$ - lo q si vede allora essere
l'"Hamiltoniana" $-H(p, q, t)$ infatti:

$$-H(p, (q, t)) = L(\dot{q}(p, (q, t)), (q, t)) - \dot{q}(p, (q, t)) \cdot p$$

in analogia con

$$g(y, z) = f(x(y, z), z) - x(y, z) \cdot y$$

Il teorema di Darboux fornisce subito

$$-\frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{q} \quad ; \quad -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Concludendo il sistema:

19

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \text{con } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) = T(\dot{q}, q, t) - U(q)$$

si trasforma nel seguente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\dot{q}, q, t) = p \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(p, q, t)$$

$$H = \dot{q}(p, q, t) \cdot p - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q, t), q, t) = H(p, q, t)$$

$$(\#) \quad \begin{cases} \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \quad \forall k=1..n$$

$$\text{inoltre } \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

(#) rappresenta il sistema Hamiltoniano del moto fermato da $2n$ equazioni in $2n$ variabili in $2n$ incognite.

Il moto descritto da tale equazione è chiaramente identico a quello delle eq. di Lagrange ma le forme delle equazioni è utile per molti scopi teorici.

Vediamo di studiare più accuratamente le forme matematiche delle equazioni di Hamilton.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \partial_{\kappa J}(q, t) \dot{q}_\kappa \dot{q}_J + \partial_\kappa(q, t) \dot{q}_\kappa + \partial_0(q, t) - U(q)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) = \partial_{Ji}(q, t) \dot{q}_J + \partial_i(q, t) = p_i$$

risolvere $\partial_{iJ} \dot{q}_J + \partial_i = p_i$ rispetto alle $\dot{q}_J$:

$$\partial_{iJ}^{-1} \partial_{iJ} \dot{q}_J + \partial_{iJ}^{-1} \partial_i = \partial_{iJ}^{-1} p_i$$

$$\delta_{iJ} \dot{q}_J = \partial_{iJ}^{-1} (p_i - \partial_i)$$

$$\dot{q}_J = \partial_{iJ}^{-1} (p_i - \partial_i) = \dot{q}_J(p, q, t)$$

$$H = \partial_{iJ}^{-1} (p_i - \partial_i) p_i - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q, t), q, t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, q, t) &= \frac{1}{2} \partial_{\kappa J} \partial_{\kappa i}^{-1} (p_i - \partial_i) \partial_{J\ell}^{-1} (p_\ell - \partial_\ell) + \partial_\kappa \partial_{\kappa i}^{-1} (p_i - \partial_i) + \\ &\quad + \partial_0(q, t) - U(q) = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{Ji} (p_i - \partial_i) \partial_{J\ell}^{-1} (p_\ell - \partial_\ell) + \partial_\kappa \partial_{\kappa i}^{-1} p_i - \partial_\kappa \partial_i \partial_{\kappa i}^{-1} + \\ &\quad + \partial_0(q, t) - U(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(p, q, t) &= \partial_{iJ}^{-1} p_i p_\ell - \partial_{iJ}^{-1} \partial_i p_\ell - \frac{1}{2} \partial_{J\ell}^{-1} (p_J - \partial_J) (p_\ell - \partial_\ell) + \\ &\quad - \partial_{\kappa i}^{-1} \partial_\kappa p_i + \partial_{\kappa i}^{-1} \partial_\kappa \partial_i - \partial_0(q, t) + U(q) \end{aligned}$$

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2} \partial_{\kappa J}^{-1}(q, t) (p_\kappa - \partial_\kappa(q, t)) (p_J - \partial_J(q, t)) - \partial_0(q, t) + U(q)$$

Allora in definitiva:

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2} a_{kj}^{-1}(q, t) p_k p_j - a_{kj}^{-1}(q, t) a_k(q, t) p_j + \frac{1}{2} a_{kj}^{-1}(q, t) a_k(q, t) a_j(q, t) - a_0(q, t) + U(q)$$

avendo usato il fatto che se a_{kj} è simmetrica anche la sua inversa è simmetrica

$$(A \cdot B = I \text{ con } A = A^T \Rightarrow (AB)^T = I \Rightarrow B^T A^T = I \Rightarrow B^T A = I \Rightarrow B^T = A^{-1} \text{ ma } B = A^{-1} \Rightarrow B = B^T)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} a_{kj}^{-1}(q, t) (\delta_{ki} p_j + p_k \delta_{ji}) - a_{kj}^{-1} a_k \delta_{ji} = \\ &= \frac{1}{2} (a_{ij}^{-1} p_j + a_{ki}^{-1} p_k) - a_{ki}^{-1} a_k = a_{ki}^{-1} (p_k - a_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kj}^{-1}}{\partial q_i} p_k p_j - \left(\frac{\partial a_{kj}^{-1}}{\partial q_i} a_k + a_{kj}^{-1} \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) p_j + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}^{-1}}{\partial q_i} a_k a_j + a_{kj}^{-1} \frac{\partial a_k}{\partial q_i} a_j + a_{kj}^{-1} a_k \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial a_0}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial a_0}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kj}^{-1}}{\partial q_i} (p_k - a_k)(p_j - a_j) - \frac{1}{2} a_{kj}^{-1} \left(\frac{\partial (a_k a_j)}{\partial q_i} - 2 \frac{\partial a_k}{\partial q_i} a_j \right) \\ \dot{q}_i = a_{ki}^{-1} (p_k - a_k) \end{cases}$$

Abbiamo espresso le equazioni di Hamilton in funzione di a_{kj} , a_k , a_0 , U .

Esempio

Il problema dei due corpi espresso prima
in formulazione lagrangiana e poi in
formulazione hamiltoniana;
consideriamo due particelle di posizioni
 $\underline{r}_1$ e $\underline{r}_2$ in un riferimento inerziale.

Con interazione elettrostatica:

$$\underline{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} [\underline{r}_1 - \underline{r}_2]$$

$$\underline{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} [\underline{r}_2 - \underline{r}_1]$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

Con interazione gravitazionale:

$$\underline{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} [\underline{r}_2 - \underline{r}_1]$$

$$\underline{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} [\underline{r}_1 - \underline{r}_2]$$

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

In entrambi i casi:

$$\underline{F}_1 = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_1} \quad \text{e} \quad \underline{F}_2 = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_2}$$

Infatti: $\nabla_{\underline{r}_1} \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} = - \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \quad \text{e}$

$$V_{12} \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} = \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

Allora studiamo il moto delle due particelle sottoposte ad un potenziale

$$|U = U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)|$$

Con coordinate libere $\underline{r}_1$ e $\underline{r}_2$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1 \cdot \dot{\underline{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2 \cdot \dot{\underline{r}}_2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$$

Con coordinate libere $\underline{r}_{cm}$ ed $\underline{r}$:

$$\begin{cases} \underline{r}_{cm} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \end{cases} \quad \text{da cui:}$$

$$\begin{cases} \underline{r}_1 = \underline{r}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} \\ \underline{r}_2 = \underline{r}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} \end{cases}$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\underline{r}}_{cm} \cdot \dot{\underline{r}}_{cm} + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} - U(|\underline{r}|)$$

Spesso si pone:

$$M = m_1 + m_2 = \text{massa totale}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{massa ridotta}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_{cn}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - U(|\underline{r}|)$$

Seguono le eq. di Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}_{cn}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_{cn}} &= 0 \Rightarrow M \ddot{\underline{r}}_{cn} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}} &= 0 \Rightarrow \mu \ddot{\underline{r}} = - \frac{\partial U(|\underline{r}|)}{\partial \underline{r}} \end{aligned}$$

Le due eq. si discacciano: la prima afferma che il centro di massa si muove su una retta di moto uniforme; la seconda dice che c'è come se si studiasse una sola particella in un campo centrale.

Per concludere l'esempio partiamo dall'equazione Hamiltoniana:

$$\underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{p}_{cn} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}_{cn}} = M \dot{\underline{r}}_{cn} \Rightarrow \dot{\underline{r}}_{cn} = \frac{\underline{p}_{cn}}{M} \\ \underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}} = \mu \dot{\underline{r}} \Rightarrow \dot{\underline{r}} = \frac{\underline{p}}{\mu} \end{cases}$$

$$\text{Allora: } H = \underline{p}_{cn} \cdot \dot{\underline{r}}_{cn} + \underline{p} \cdot \dot{\underline{r}} - \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$H(\underline{p}, \underline{p}_{cn}, \underline{r}, \underline{r}_{cn}, t) = \frac{1}{2} \frac{\underline{p}_{cn} \cdot \underline{p}_{cn}}{M} + \frac{1}{2} \frac{\underline{p} \cdot \underline{p}}{\mu} + U(|\underline{r}|)$$

le eq. di Hamilton sono allora:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}}_{cn} &= \frac{\underline{p}_{cn}}{m} \\ \dot{\underline{p}}_{cn} &= 0 \\ \dot{\underline{r}} &= \frac{\underline{p}}{m} \\ \dot{\underline{p}} &= - \frac{\partial U(|\underline{v}|)}{\partial \underline{r}}\end{aligned}$$

POTENZIALI DIPENDENTI DALLA VELOCITÀ:
LAGRANGIANA ED HAMILTONIANA DI UNA
PARTICELLA CARICA

Abbiamo visto che per una particella le equazioni di Lagrange si scrivono nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}} = 0 \quad \text{per } \underline{r} = (x, y, z)$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = T(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) - U(\underline{r})$

avendo supposto $\underline{F} = - \frac{\partial U(\underline{r})}{\partial \underline{r}}$

Alcune forze dipendono dalla velocità però si possono esprimere con un potenziale dipendente dalla velocità.

Cio accade per esempio con la forza elettromagnetica di Lorentz.

26
 L'idea infatti che per ora esiste
 due potenziali dipendenti anche delle
 velocità che porta nella lagrangiana
 fa tornare le consuete equazioni del moto:

$$L = T(\underline{z}, \dot{\underline{z}}, t) - U(\underline{z}, \dot{\underline{z}}, t)$$

$$\text{con } F(\underline{z}, \dot{\underline{z}}, t) = q E(\underline{z}, t) + q \dot{\underline{z}} \wedge \underline{B}(\underline{z}, t)$$

Tenere d'ora E e B si può
 ragionare in termini di potenziali
 elettromagnetici:

$$\text{div } \underline{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{B}(\underline{z}, t) = \nabla \wedge \underline{A}(\underline{z}, t)}$$

$$\nabla \wedge \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \wedge \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \underline{A})$$

$$\nabla \wedge \left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{z}, t) = -\nabla \psi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}$$

La coppia $(\underline{A}(\underline{z}, t); \psi(\underline{z}, t))$ individua univocamente
 l'altra coppia (E, B) ma non è vero il
 contrario la forma di Lorentz diventa allora:

$$\boxed{F(\underline{z}, \dot{\underline{z}}, t) = q \left[\dot{\underline{z}} \wedge (\nabla \wedge \underline{A}(\underline{z}, t)) - \nabla \psi(\underline{z}, t) - \frac{\partial \underline{A}(\underline{z}, t)}{\partial t} \right]}$$

l'equazione del moto risulta essere:

$$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = q \left[\frac{d\underline{r}}{dt} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}(\underline{r}, t)) - \underline{\nabla} \psi(\underline{r}, t) - \frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t} \right]$$

Bisogna trovare un potenziale tale che l'equazione di Lagrange sia uguale alla precedente. Sviluppando rotore e prodotto vettoriale nella precedente si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{F}_x = q \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \\ \bar{F}_y = q \left[v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - v_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right] \\ \bar{F}_z = q \left[v_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right] \end{cases}$$

$$\underline{m\dot{A}} : \begin{cases} \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \\ \frac{dA_y}{dt} = \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial A_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} v_z \\ \frac{dA_z}{dt} = \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} v_z \end{cases}$$

Sostituendo le seconde nelle prime si ottiene:

$$\begin{cases} F_x = q \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} \right] \\ F_y = q \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{dA_y}{dt} \right] \\ F_z = q \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{dA_z}{dt} \right] \end{cases}$$

Cioè riscrivendo i predetti scalari:

$$\begin{cases} F_x = q \left[\underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} \right] \\ F_y = q \left[\underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{dA_y}{dt} \right] \\ F_z = q \left[\underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{dA_z}{dt} \right] \end{cases}$$

Bisogna trovare $U(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ tale da prendere la Lagrangiana $\mathcal{L} = T - U(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ in $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}} = 0$ si ottengono le eq. del moto cercate. E' sufficiente porre

$$U(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = q \psi(\underline{r}, t) - q \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

da cui:

$$\mathcal{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} - q \psi(\underline{r}, t) + q \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

infatti:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)_x = m \ddot{x} + q \frac{dA_x}{dt} + q \frac{\partial \psi}{\partial x} - q \dot{z} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)_y = m \ddot{y} + q \frac{dA_y}{dt} + q \frac{\partial \psi}{\partial y} - q \dot{z} \cdot \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)_z = m \ddot{z} + q \frac{dA_z}{dt} + q \frac{\partial \psi}{\partial z} - q \dot{z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z}$$

e quindi si vede che la lagrangiana proposta soddisfa le equazioni del problema.

Dato la lagrangiana si parte con il metodo noto all'Hamiltoniana:

$$\underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{z}}} = m \underline{\dot{z}} + q \underline{A}(\underline{z}, t)$$

da cui invertendo rispetto ad $\underline{\dot{z}}$:

$$\underline{\dot{z}} = \frac{\underline{p} - q \underline{A}(\underline{z}, t)}{m}$$

L'Hamiltoniana allora risulta essere:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\underline{p} \cdot \underline{p}}{m} - \frac{q}{m} \underline{p} \cdot \underline{A}(\underline{z}, t) - \frac{1}{2} m \left(\frac{\underline{p} - q \underline{A}(\underline{z}, t)}{m} \right) \cdot \left(\frac{\underline{p} - q \underline{A}(\underline{z}, t)}{m} \right) + \\ &\quad + q \psi(\underline{z}, t) - q \frac{\underline{p} - q \underline{A}(\underline{z}, t)}{m} \cdot \underline{A}(\underline{z}, t) = \\ &= \frac{\underline{p} \cdot \underline{p}}{m} - \frac{q}{m} \underline{p} \cdot \underline{A} - \frac{1}{2} \frac{\underline{p} \cdot \underline{p}}{m} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{m} \underline{A} \cdot \underline{A} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{q}{m} \underline{p} \cdot \underline{A} + q\psi - q \frac{\underline{p}}{m} \underline{A} + \frac{q^2}{m} \underline{A} \cdot \underline{A} \quad \text{da}$$

con infine:

$$H(\underline{r}, \underline{p}, t) = \frac{1}{2m} (\underline{p} - q \underline{A}(\underline{r}, t))^2 + q\psi(\underline{r}, t)$$

FORMALISMO HAMILTONIANO

Unico modo di dare $H(p, q, t)$ si ottengono
le eq. del moto

$$\begin{cases} \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}$$

Per fare bre $\underline{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow H(p, q, t) = H(\underline{x}, t)$

$$\nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ \partial H / \partial q \end{pmatrix} ; \quad \Pi \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}$$

$$\dot{\underline{x}} = \Pi \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t) \quad \text{sistema in } \mathbb{R}^{2n}$$

è utile calcolare la divergenza del
campo di def. del sistema di
eq. diff.:

$$\text{div}(\Pi \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t)) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial (\Pi \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t))_i}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left[-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right]}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \right]}{\partial q_k} = 0$$

Alloca

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \Pi \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t) \\ \text{con } \operatorname{div}(\Pi \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t)) &= 0 \end{aligned}$$

o.e.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{F}(\underline{x}, t) \\ \text{con } \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}, t) &= 0 \end{aligned}$$

Teorema di Liouville

Sia $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ con $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ e sia $R_0 \subset \mathbb{R}^k$ | ogni punto di R_0 si può considerare come punto iniziale del sistema. Dopo t R_0 si è trasformato in $R(t)$ e come del flusso di fase del sistema.

Si dimostra che

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} d\underline{x} = \int_{R(t)} \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

Nel caso particolare di sistema.

Hamiltoniano (a divergenza nulla) il flusso di fase conserva i volumi - (fondamentale in statistica)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{I} \cdot \mathbb{I}^T &= \mathbb{1} & \mathbb{I}^2 &= -\mathbb{1} \\ \mathbb{I}^{-1} &= \mathbb{I}^T = -\mathbb{I} \end{aligned}}$$

def: una Matrice $B: 2n \times 2n$ si dice
Hermitiana se $\boxed{B^T \mathbb{I} + \mathbb{I} B = 0}$

teorema: sono affermazioni equivalenti:

- 1) B Hermitiana
- 2) $B = \mathbb{I} S$ con $S = S^T$ (simmetria di S)
- 3) $(\mathbb{I} B)^T = (\mathbb{I} B)$ (simmetria di $\mathbb{I} B$)

dim

$$1) \rightarrow 3) \quad B \text{ Hermitiana} \Rightarrow B^T \mathbb{I} = -\mathbb{I} B \Rightarrow$$

$$-B^T \mathbb{I}^T = -\mathbb{I} B \Rightarrow (\mathbb{I} B)^T = (\mathbb{I} B) \quad \text{c.v.d.}$$

$$3) \rightarrow 1) \quad (\mathbb{I} B)^T = (\mathbb{I} B) \Rightarrow B^T \mathbb{I}^T = \mathbb{I} B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^T \mathbb{I} = -\mathbb{I} B \quad \text{c.v.d.}$$

$$2) \rightarrow 3) \quad B = \mathbb{I} S \text{ con } S = S^T \Rightarrow \mathbb{I} B = \mathbb{I}^2 S^T = -S^T = -S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbb{I} B)^T = \mathbb{I} B \quad \text{c.v.d.}$$

$$3) \rightarrow 2) \quad (\mathbb{I} B)^T = \mathbb{I} B \quad \text{pongo } S^T = -\mathbb{I} B \Rightarrow$$

$$S = S^T \text{ e } B = \mathbb{I} S \quad \text{c.v.d.}$$

Tale proprietà delle matrici Hermitiane
servono per meglio caratterizzare i sistemi
Hermitiani.

def Nello spazio delle matrici $n \times n$
definiamo il commutatore di Lie:

$$[B, C] = BC - CB$$

Teo Se B e C Hermitiane allora $[B, C]$ è
Hermitiana

dim: $B = \Pi S$; $S = S^T$
 $C = \Pi R$; $R = R^T$

$$[B, C] = BC - CB = \Pi S \Pi R - \Pi R \Pi S =$$

$$= \Pi (S \Pi R - R \Pi S)$$

perché $[B, C]$ sia Hermitiana deve essere

$$(S \Pi R - R \Pi S)^T = (S \Pi R - R \Pi S)$$

$$\text{ma } (S \Pi R - R \Pi S)^T = (S \Pi R)^T - (R \Pi S)^T,$$

$$= R^T \Pi^T S^T - S^T \Pi^T R^T = S \Pi R - R \Pi S.$$

C.v.d.

def
Uno spazio vettoriale V è detta algebra
se $\exists$ una operazione $V \times V \rightarrow V$ con
le proprietà:

$$1) (A B) C = A (B C) \quad \forall A, B, C \in V$$

$$2) A B + A C = A (B + C) \quad \forall A, B, C \in V$$

$$3) A B + C B = (A + C) B \quad \forall A, B, C \in V$$

$$4) (\lambda A) B = \lambda (A B) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; A, B \in V.$$

Lo spazio delle matrici con il usuale
prodotto righe per colonne è
un'algebra - 34

Lo spazio delle matrici con il commutatore
di Lie è un'algebra.

def:

Un'algebra V è detta algebra di Lie se
 $V \times V \rightarrow V$ ha le proprietà:

$$1) AB = -BA \quad \forall A, B \in V$$

$$2) (AB)C + (BC)A + (CA)B = 0 \quad \forall A, B, C \in V.$$

Lo spazio delle matrici con il commutatore
è un'algebra di Lie.

L'insieme delle matrici Hamiltoniane è un
sottospazio dello spazio delle matrici.

Lo spazio delle matrici Hamiltoniane è
un'algebra di Lie con il commutatore.

def: Una matrice $A: 2n \times 2n$ è detta
simplettica se $A^T \Pi A = \Pi$

lemma: Se B è Hamiltoniana $\Rightarrow A(t) = e^{Bt}$ è
simplettica $\forall t$.

def: un campo $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ $F(x, t)$ è

Hamiltoniano se $\exists H(x, t)$ tale che

$$F(x, t) = \Pi \nabla_x H(x, t).$$

Teorema 1 fondamentale

35

$F(x, t)$ è Hamiltoniano $\Leftrightarrow$ e solo se
 $\nabla_x F(x, t)$ è una matrice Hamiltoniana
 $\forall (x, t)$.

TRASFORMAZIONI

Sia $\dot{x} = v(x, t)$ un sistema di eq. diff.

Sia nota una trasformazione invertibile:

$$\begin{cases} y = y(x, t) \\ x = x(y, t) \end{cases}$$

Come diventa il sistema nelle y :

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}(x(y, t), t) v(x(y, t), t) + \frac{\partial y}{\partial t}(x(y, t), t)$$

Si ha un nuovo sistema $\dot{y} = w(y, t)$

Eseguiamo questa operazione ad un sistema di Hamilton:

$$\dot{x} = \mathbb{I} \nabla_x H(x, t)$$

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x(X, t) \\ X = X(x, t) \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial x}(x(X, t), t) (\mathbb{I} \nabla_x H(x, t))(x(X, t), t) + \frac{\partial X}{\partial t}(x(X, t), t)$$

Si ha un nuovo sistema $\dot{X} = W(X, t)$

Ora in generale non sappiamo se
questo nuovo sistema è ancora
Hamiltoniano cioè se:

$$W(\underline{x}, t) = \mathbb{I} \nabla_{\underline{x}} K(\underline{x}, t)$$

con $K(\underline{x}, t)$ nuovo Hamiltoniano opportuno.

def: un diffeomorfismo, tale da, per

ogni Hamiltoniana $H(\underline{x}, t)$ trasformare

il sistema in un altro con nuova Hamiltoniana

$K(\underline{x}, t)$ si dice essere una trasformazione

che conserva la struttura canonica.

def: una trasformazione di coordinate si

dice canonica se $J(\underline{x}, t) = \nabla_{\underline{x}} \underline{X}(\underline{x}, t)$

è simplettica ovunque scelto $(\underline{x}, t)$

una trasformazione canonica indep.

dal tempo si dice completamente
canonica.

Teorema

Le trasformazioni canoniche conservano
la struttura.

Sia ancora $x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ e siano $f(x, t)$ e $g(x, t)$ due funzioni date -

Si definiscono parentesi di Poisson le seguenti:

$$\{f, g\} = \left(\nabla_x f(x, t) \right)^T \Pi \left(\nabla_x g(x, t) \right)$$

Sostituendo $x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ si ha:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} ; \frac{\partial f}{\partial q} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} ; \frac{\partial f}{\partial q} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial q} \\ \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \end{aligned}$$

cioè ponendo la somma nelle formule:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]$$

Due parentesi molto importanti sono:

$$\begin{aligned} \{p_J, H\} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial p_J}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_J}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^n \delta_{Ji} \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{q_J, H\} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial q_J}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_J}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_{Ji} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_J} \end{aligned}$$

Allora le eq. di Hamilton si riscrivono
in una terza forma (le prime due
erano :

$$\left[\begin{array}{l} \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \left[\dot{\underline{x}} = \mathbb{I} \nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, t) \right]$$

mediante le due precedenti parentesi:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{p}_i = \{p_i, H\} \\ \dot{q}_i = \{q_i, H\} \end{array} \right]$$

Le parentesi di Poisson servono anche per
esprimere la derivata totale di una funzione :

$$f = f(\underline{x}, t) = f(p, q, t) \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)^T \dot{\underline{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)^T \mathbb{I} \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \right]$$

$f(\underline{x})$ è un integrale primo se e solo
se $\{f, H\} = 0$ (infatti se $f = f(\underline{x}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$)

proprietà

39

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$$

$$(\text{Jacoby}): \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Teorema di Poisson

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}$$

lim:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{ \{f, g\}, H \}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla_x f)^T \mathbb{I} (\nabla_x g)] = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{ \{f, g\}, H \} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

Usando Jacoby:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \right\} \equiv \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Quindi se f e g sono integrali primi
allora $\{f, g\}$ è un altro integrale primo.

Esempio

Consideriamo una particella libera
in un sist. di riferimento inerziale.

$$Q = (x, y, z) = \underline{r}$$

$$P = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) = (p_x, p_y, p_z) = \underline{p}$$

eq. del moto $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} p_x = 0 \\ \frac{d}{dt} p_y = 0 \\ \frac{d}{dt} p_z = 0 \end{cases}$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

Il momento angolare si conserva

$$\frac{d}{dt} (\underline{r} \wedge \underline{p}) = \frac{d\underline{r}}{dt} \wedge \underline{p} + \underline{r} \wedge \frac{d\underline{p}}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (y \overset{(u_x)}{p_z} - z \overset{(u_x)}{p_y}) = 0 \\ \frac{d}{dt} (z \overset{(u_y)}{p_x} - x \overset{(u_y)}{p_z}) = 0 \\ \frac{d}{dt} (x \overset{(u_z)}{p_y} - y \overset{(u_z)}{p_x}) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto
6 integrali
primi indipendenti
noti dalle meccaniche
elementari.

Formiamo le seguenti parentesi di

Poisson:

$$\{p_x, p_y\} = 0 \quad ; \quad \{p_x, m_y\} = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial m_y}{\partial x} = -p_z$$

$$\{m_x, m_y\} = \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial m_y}{\partial p_z} - \frac{\partial m_x}{\partial p_z} \frac{\partial m_y}{\partial t} = x p_y - y p_x = m_z \quad 41$$

Tutte le coppie possibili:

$\{p_x, p_y\} = \{p_x, p_z\} = \{p_y, p_z\} = 0$	
$\{p_x, m_y\} = p_z$	$\{p_x, m_z\} = -p_y$
$\{p_z, m_x\} = p_y$	$\{p_z, m_y\} = -p_x$
$\{p_y, m_z\} = p_x$	$\{p_y, m_x\} = -p_z$
$\{p_x, m_x\} = 0$	$\{m_x, m_y\} = m_z$
$\{p_y, m_y\} = 0$	$\{m_z, m_x\} = m_y$
$\{p_z, m_z\} = 0$	$\{m_y, m_z\} = m_x$

Non sono
tutti ottenuti
integrali
primi:
indipendenti
da quelli
iniziali.

In generale quando si conoscono $2n$
integrali primi allora lo stesso vale i
moti del sistema - se conosciamo $2n-1$
integrali indipendenti abbiamo una
idea parziale dei moti, e più grande e-
l, più crescenti e le nostre conoscenze.

Ci riferiamo a sistemi scleronomi conservativi di
due derivati delle seguenti in formalismo
lagrangiano:

mdo:
$$a_{ij} \ddot{q}_j + \left[\begin{smallmatrix} k_j \\ 1 \end{smallmatrix} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Equilibrio:
$$\left[- \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \right]$$

in formalismo hamiltoniano:

mdo:
$$\begin{cases} \dot{p}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kj}^{-1}}{\partial q_i} p_k p_j \\ \dot{q}_i = a_{ki}^{-1} p_k \end{cases}$$

Equilibrio:
$$\left[- \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad e \quad p_i = 0 \right]$$

nozione di stabilità: consideriamo il sistema
'equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$ di

tipo autonomo in quanto ci riferiamo a
sistemi scleronomi. Si chiamano punti
di equilibrio x_0 quelli, tali per cui il sistema
 $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ha soluzione: $x(t) = x_0 \quad \forall t \geq 0$.

la ricerca dei punti d'equilibrio si
riduce alla soluzione del sistema algebrico
 $f(x_0) = 0$.

Sia $\underline{x}_0$ punto d'equilibrio cioè $f(\underline{x}_0) = 0$. 43
Si dice che $\underline{x}_0$ è stabile se $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ tale che

$$\|\underline{x}(t_0) - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{x}(t) - \underline{x}_0\| < \varepsilon$$

Dove $\underline{x}(t)$ è soluzione del problema seguente:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Metodo della funzione di Lyapunov:

Sia $\underline{x}_0$ d'equilibrio. Si dice funzione di

Lyapunov $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una applicazione con

le seguenti proprietà:

1) $V(\underline{x})$ di classe C_1 (derivabile con derivate parziali continue)

2) $V(\underline{x}_0) = 0$ e $V(\underline{x}) > 0 \forall \underline{x} \neq \underline{x}_0$

3) $\frac{d}{dt}[V(\underline{x}(t))] \leq 0$ dove $\underline{x}(t)$ è la soluzione del problema differenziale.

Quest'ultima derivata si può calcolare:

$$\frac{d}{dt}[V(\underline{x}(t))] = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} f(\underline{x})$$

Se esiste una funzione di Lyapunov per
il punto d'equilibrio x_0 allora esso è
stabile.

Si dice che x_0 è asintoticamente stabile
se x_0 è stabile e se inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

Se esiste una funzione di Lyapunov per cui

$\frac{d}{dt} V(x(t))$ è uguale esattamente a zero

allora il punto è asintoticamente stabile.

Studio della stabilità dell'equilibrio nei
sistemi scleronomi. Abbiamo visto che

l'equilibrio è dato da $\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$

Teorema

Se V ha un minimo stretto nel
punto d'equilibrio allora esso è stabile.

dim:

Consideriamo l'Hamiltoniana che coincide
con l'energia vista lo scleronomia.

Supponiamo che la costante additiva
arbitraria del potenziale sia fissata
in modo che essa sia nulla nel punto

d'equilibrio:

$$H = H(p, q) = \frac{1}{2} \hat{a}_{kj}^{-1}(q) p_k p_j + U(q)$$

E_{ne} è differenziabile (C^1) e sempre
positiva, nulle nel punto d'equilibrio.

Inoltre essa è un integrale primo quando.

Costanti durante il moto. Quindi è una

funzione di Lyapunov quando il p.t. d'equilibrio
è stabile (questo nell'ipotesi di minimo
c.v.d.

stretto).

Piccole oscillazioni attorno ad un punto
d'equilibrio stabile q^* di un sistema scleronomo:
viste le stabilità del punto d'equilibrio

ipotizziamo che il potenziale abbia il
minimo stretto e che quindi il suo hessiano
calcolato nell'equilibrio sia definito positivo.

Approssimazione dell'energia potenziale:

$$U(q) \approx U(q^*) + \bar{\nabla} U(q^*)(q - q^*) + \frac{1}{2} (q - q^*)^T \text{Hess} U(q^*) (q - q^*)$$

$U(q^*)$ può essere posta nelle fissande
 la costante arbitraria. $\bar{U}(q^*)$ è nell'ordine
 q^* è d'equilibrio. Hess $\bar{U}(q^*)$ è una
 matrice simm. def. pos.

$$U(q) \approx \frac{1}{2} (q - q^*)^T \text{Hess } \bar{U}(q^*) (q - q^*)$$

Approssimazione dell'energia cinetica:

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \text{ e esattamente}$$

l'approx si introduce calcolando $A(q)$ in q^*

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q^*) \dot{q}$$

Allora si può scrivere la Lagrangiana approssimata:
 prendendo $C \triangleq \text{Hess } \bar{U}(q^*)$ e $A \triangleq A(q^*)$ si ottiene:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} - \frac{1}{2} (q - q^*)^T C (q - q^*)}$$

La q. del moto risultano allora essere:

$$\boxed{A \ddot{q} + C (q - q^*) = 0}$$

poniamo $\underline{x} = q - q^* \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0 \quad ; \quad \text{poniamo ancora}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= \underline{x} \\ \underline{x}_2 &= \dot{\underline{x}} \end{aligned}$$

allora: $\dot{\underline{x}}_1 = \underline{x}_2$

$$\dot{\underline{x}}_2 = \ddot{\underline{x}} = -A^{-1}C \underline{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A^{-1}C & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1(0) \\ \underline{x}_2(0) \end{pmatrix} e^{\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A^{-1}C & 0 \end{array} \right) t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(0) - q^* \\ \dot{q}(0) \end{pmatrix} e^{\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A^{-1}C & 0 \end{array} \right) t}}$$

Soluzioni
delle
piccole
oscillazioni.

Vali autovalori della matrice del sistema:

$$\begin{vmatrix} \lambda I & -I \\ A^{-1}C & \lambda I \end{vmatrix} = \lambda^n \det \left(\lambda I + A^{-1}C \frac{1}{\lambda} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\det(\lambda^2 I + A^{-1}C) = 0 \quad |d^2 z = \omega^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\det(C - \omega^2 A) = 0} \quad \text{equazione scalare}$$

$$\boxed{\omega^2 > 0}$$

$\exists$ n valori positivi di ω^2
e quindi n valori di ω
detti frequenze proprie del sistema.

Principi Variationali

48

Principio di minima azione: introduciamo i concetti fondamentali del calcolo delle variazioni -
Lo scopo di tale disciplina matematica è quello di trovare una funzione $y(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale da rendere stazionario (min o max) il seguente tipo di funzionale:

$$F(y(x)) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{il}$$

quale associa ad ogni funzione $y(x)$ un numero rappresentato dal risultato dell'integrale (a e b due estremi fissati) - A tale requisito spesso si associa quello di imporre valori particolari per y ad $y(x)$ in corrispondenza di a e b .

Teorema: $y(x)$ rende stazionario il funzionale $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} F(y(x) + \alpha h(x)) \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall h(x) \text{ di supporto compatto}$$

Le condizioni al contorno su $y + \alpha h$.

Lemma: $\int_a^b \phi(x) h(x) dx = 0$; $h \in C^n[a, b]$; $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Usando il lemma ed il lemma è facile
ricordare il problema fondamentale del
calcolo delle variazioni ad un problema
differenziale con condizioni al contorno (non di Cauchy)

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F(y+\alpha h) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, y+\alpha h, y'+\alpha h') dx \right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left. \frac{d}{d\alpha} f(x, y+\alpha h, y'+\alpha h') dx \right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right] dx \quad \text{per usando parti:}$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F(y+\alpha h) \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} h dx + \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} h \right) dx - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h dx =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y'} h \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h dx$$

$$\text{Se } y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b \Rightarrow h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} F(y+\alpha h) \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) h dx$$

$$\text{e usando il lemma: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Il discorso fatto può essere analogamente ripetuto per un funzionale che dipende da più funzioni e cioè:

$$\begin{cases} F(y_1(x) \dots y_n(x)) = \int_a^b f(x, y_1 \dots y_n, \dot{y}_1 \dots \dot{y}_n) dx \\ y_J(a) = y_{Ja} ; y_J(b) = y_{Jb} \quad \forall J=1..n \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_J} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_J} = 0 \\ y_J(a) = y_{Ja} ; y_J(b) = y_{Jb} \quad \forall J=1..n \end{cases}$$

I sistemi conservativi (reoner. o scleronomi) sono descritti da $\frac{\partial L}{\partial q_J} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_J} = 0$ con $L = L(t, q, \dot{q})$

Quindi si può enunciare il principio di minima azione di Hamilton-Fecky $\Rightarrow$

Un sistema conservativo che evolve tra t_1 e t_2 tra gli stati q_1 e q_2 ha una dinamica tale da minimizzare la cosiddetta azione:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt$$

Principio di Meupertuis, si può abbreviare:
 Ove siamo nelle ipotesi di sistema scleronomico
 quindi

$$\begin{cases} S' = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt & \text{minimo} \\ T + U = E & \text{costante} \end{cases}$$

$$T = E - U \Rightarrow T = \sqrt{T} \sqrt{E - U}$$

$$T - U = 2T - E \Rightarrow \left(\min S \Leftrightarrow \min \int_{t_1}^{t_2} 2T dt \right)$$

$$\text{M2} \quad 2T = \sqrt{2T} \sqrt{2(E - U)}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} (2T - E) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - E(t_2 - t_1) \triangleq S_0 - E(t_2 - t_1)$$

$$\text{ovvero } S_0 = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} \sqrt{2(E - U)} dt \Rightarrow$$

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E - U)} \sum_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k dt \quad \left(\text{con somme sottoindice} \right)$$

Nel caso scleronomico minimizzare S equivale
 a minimizzare S₀ delle forme suddette.

Equazioni di Hamilton-Jacoby

Consideriamo un sistema meccanico descritto
 da l'eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = - \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i} \end{cases}$$

Sia $\begin{cases} p = p(\bar{p}, \bar{q}, t) \\ q = q(\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{q} = \bar{q}(p, q, t) \\ \bar{p} = \bar{p}(p, q, t) \end{cases}$ una

trasformazione canonica (conserva la struttura
 Hamiltoniana ed ha Jacobiana simplettica) -
 Sia in più $\left[\frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \right]$ con $\det \neq 0$ - la transf. è
 anche allora libera.

Vista la completezza
 il sistema: $\begin{cases} \dot{p} = - \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p} \end{cases}$

Si trasformi in: $\begin{cases} \dot{\bar{p}} = - \frac{\partial k(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial \bar{q}} \\ \dot{\bar{q}} = \frac{\partial k(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial \bar{p}} \end{cases}$

Per le condizioni di transf. libera h. h.c.:

53

$$\begin{cases} p = p(q, \tilde{q}, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

Teorema

In tali ipotesi $\exists$ una funzione $F(q, \tilde{q}, t)$ detta funzione generatrice tale da:

$$1) \quad p(q, \tilde{q}, t) = \frac{\partial F(q, \tilde{q}, t)}{\partial q}$$

$$2) \quad \tilde{p}(q, \tilde{q}, t) = - \frac{\partial F(q, \tilde{q}, t)}{\partial \tilde{q}}$$

$$3) \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{tutte con le variabili } (q, \tilde{q}, t)$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Il problema delle integrazioni delle eq. del moto di un sistema Hamiltoniano può essere ridotto a quello di cercare una trasformazione canonica delle variabili (p, q) e nuove variabili $(\tilde{p}, \tilde{q})$ generata da una funzione $F(q, \tilde{q}, t)$ in maniera tale che la nuova Hamiltoniana sia identicamente

ovvero $K(\hat{p}, \hat{q}, t) \equiv 0$ -

54

Infatti in questo caso le equazioni vanno subito integrate - Da $K=0$ si ottiene

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{dalla condizione 3 del teorema}$$

$$\text{Ma } H(q, \tilde{q}) = H(q, p(q, \tilde{q}, t), t) = H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}(q, \tilde{q}, t), t\right)$$

Allora bisogna risolvere l'equazione

$$\boxed{H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0}$$

dove $F = F(q, t) = F(q, t; \tilde{q})$

$\tilde{q}$ assume il significato di vettore di costanti arbitrarie che devono essere presenti nella soluzione completa.

Deve l'Hamiltoniana $H(p, q, t)$ sia $F(q, \tilde{q}, t)$ un integrale completo di Hamilton -
- Jacobi dipendente da n costanti $\tilde{q}$ -
Le soluzioni del moto si ricavano da

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad ; \quad \tilde{p} = - \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}$$

spesso si esprime questo dato sotto
intere più $\hat{p}, \hat{q}$ e quindi:

Dato l'Hamiltoniana $H(p, q, t)$ sia $F(q, \eta, t)$
un integrale completo delle eq. d.

Hamilton Jacoby $H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

dipendente da n costanti arbitrarie $\eta_1, \dots, \eta_n$

Allora le soluzioni del sistema delle eq.

di Hamilton si ricavano da

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \xi_j = \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \quad j=1, \dots, n.$$

dove $\xi_1, \dots, \xi_n$ sono ancora costanti.

Nota: $\frac{dF(q, \hat{q}, t)}{dt} = \frac{dF(q, \eta, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$

ma $\frac{\partial F}{\partial q} = p$; $\frac{\partial F}{\partial t} = -H$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = p \dot{q} - H = L$$

Allora $S = F \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} L dt$

- Esempio: il punto materiale libero:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Sia $F(x, y, z, t) = X(x) + Y(y) + Z(z) + T(t)$
 Allora:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dX(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY(y)}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dZ(z)}{dz} \right)^2 \right] + \frac{dT(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dX(x)}{dx} = \eta_1; \quad \frac{dY(y)}{dy} = \eta_2; \quad \frac{dT(t)}{dt} = \eta_3$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{1}{2m} (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)$$

$$F(\eta, t) = x\eta_1 + y\eta_2 + z\eta_3 - \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}{2m} t$$

$$p_x = \eta_1; \quad p_y = \eta_2; \quad p_z = \eta_3$$

$$\xi_1 = x - \frac{\eta_1 t}{m}; \quad \xi_2 = y - \frac{\eta_2 t}{m}; \quad \xi_3 = z - \frac{\eta_3 t}{m}$$

$$x = \xi_1 + \frac{\eta_1 t}{m}; \quad y = \xi_2 + \frac{\eta_2 t}{m}; \quad z = \xi_3 + \frac{\eta_3 t}{m}$$

- Esempio: l'oscillatore armonico:

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$F(q, \eta, t) = Q(q) + T(t)$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial Q(q)}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{\frac{\partial T}{\partial t}}{=} 0$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial Q(q)}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = \eta$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = -\eta \Rightarrow T(t) = -\eta t$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial Q(q)}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = \eta$$

$$\frac{\partial Q(q)}{\partial q} = \sqrt{2m\eta - m^2 \omega^2 q^2} = \sqrt{2m\eta} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\eta}}$$

$$Q(q) = \sqrt{2m\eta} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\eta}} dq$$

la primitiva ha più forme per parti:

$$Q(q) = \frac{1}{2} \sqrt{2m\eta} \left[q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\eta}} + \sqrt{\frac{2\eta}{m\omega^2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\eta}} q\right) \right]$$

Alors

$$F(q, \eta, t) = \frac{1}{2} \sqrt{2m\eta} \left[q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\eta}} + \sqrt{\frac{2\eta}{m\omega^2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\eta}} q\right) \right] - \eta t$$

$$\zeta = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\eta}} q\right) - t$$

$$\omega(\zeta + t) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\eta}} q\right)$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\eta}{m\omega^2}} \sin[\omega(\zeta + t)] \quad \text{cd anche :}$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \sqrt{2m\eta} \cos\left[\omega\left(\frac{\partial F}{\partial \eta} + t\right)\right]$$

MECCANICA STATISTICA

59

Consideriamo un sistema descritto da
una Hamiltoniana $H(p, q, t)$ e dalle
equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \{p_i, H\} \\ \dot{q}_i = \{q_i, H\} \end{cases}$$

Fissate le condizioni iniziali $p_i(t_0)$ e $q_i(t_0) \forall i=1..n$
il moto del sistema è perfettamente noto
nel passato e nel futuro di t_0 . Questo
è il programma fondamentale della meccanica
classica newtoniana. In meccanica statistica
invece le condizioni iniziali non sono
deterministicamente note bensì soltanto
note una densità di probabilità.

È cioè nota a priori la probabilità che
lo stato iniziale sia in una determinata
sotto regione dello spazio completo delle fasi $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\exists \rho_0(p, q): P_r \{ (p, q) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{2n} \} = \int_{\Gamma} \rho_0(p, q) dp dq$$

$$\text{inoltre sarà sempre: } \int_{\mathbb{R}^{2n}} \rho_0(p, q) dp dq = 1.$$

Dato il sistema $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$ e $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ 60
con $p_i(t_0) = \tilde{p}_i$ e $q_i(t_0) = \tilde{q}_i$ $\forall i = 1 \dots n, n' \text{ h.c.}$

$$\begin{cases} p_i(t) = p_i(\{\tilde{p}_i\}, \{\tilde{q}_i\}, t) \\ q_i(t) = q_i(\{\tilde{p}_i\}, \{\tilde{q}_i\}, t) \end{cases}$$

Cioè il flusso di fase dipende ovviamente
da t e delle condizioni iniziali.
Visto che le condizioni iniziali sono
variabili stocastiche, il moto del sistema
è un processo stocastico.

Identifichiamo le varie componenti
dell'esperimento $E(S, F, P)$; S è
l'insieme dei risultati elementari;
in questo caso un risultato elementare
 $\gamma \in S$ è coincidente con il sostegno di un
set di condizioni iniziali; F è il
campo di Borel (o σ -algebra) di S .
 P è la funzione probabilitaria che associa
ad ogni evento appartenente ad F un
valore numerico reale in $[0, 1]$.

$$R_0(p, q) = P_r \{ \xi : \tilde{P}(\xi) \leq p \text{ e } \tilde{Q}(\xi) \leq q \}$$

dove $R_0(p, q)$ è la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie $\tilde{P}(\xi), \tilde{Q}(\xi)$:

$$\rho(p, q) = \frac{\partial^{2n} R_0(p, q)}{\partial p_1 \dots \partial p_n \partial q_1 \dots \partial q_n}$$

Adesso $p_i(t)$ e $q_i(t)$ sono $\forall t$ funzioni di variabili aleatorie con densità:

$$R(p, q, t) = P_r \{ \xi : P(\xi, t) \leq p \text{ e } Q(\xi, t) \leq q \}$$

$$\rho(p, q, t) = \frac{\partial^{2n} R(p, q, t)}{\partial p_1 \dots \partial p_n \partial q_1 \dots \partial q_n}$$

$$\begin{aligned} R(p, q, t) &= P_r \{ \xi : P(\tilde{P}(\xi), \tilde{Q}(\xi), t) \leq p \text{ e } Q(\tilde{P}(\xi), \tilde{Q}(\xi), t) \leq q \} = \\ &= P_r \{ \xi : (\tilde{P}(\xi), \tilde{Q}(\xi)) \in \Gamma_{pq}^{(H)} \subset \mathbb{R}^{2n} \} \quad \text{dove} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{pq}^{(H)} = \{ (\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathbb{R}^{2n} : P(\{\tilde{P}\}, \{\tilde{Q}\}, t) < p \text{ e } Q(\{\tilde{P}\}, \{\tilde{Q}\}, t) < q \}$$

$$R(p, q, t) = \int_{\Gamma_{pq}^{(H)}} \rho(p, q) dp dq \Rightarrow \rho(p, q, t) = \frac{\partial^{2n} R}{\partial p \partial q}$$

In tale modo si definisce e calcola in
linea d. principio la densità $\rho(p, q, t)$.
Però ora è possibile usare il teorema
di Liouville che afferma la invarianza
del volume nello spazio delle fasi
il corso del flusso di un sistema
Hamiltoniano. Ne segue che

$$\left[\frac{d}{dt} \rho(p, q, t) = 0 \right] \quad \text{cioè:}$$

$$\left[\frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial t} + \{ \rho(p, q, t), H \} = 0 \right]$$

Allora si ha le equazioni di Liouville:

$$\left[\frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial q_i} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial p_i} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_i} \right] \right]$$
$$\rho(p, q, t_0) = \rho_0(p, q)$$

Nota la densità di probabilità iniziale si
può trovare la densità di probabilità
in qualsiasi istante successivo.