

NOTE SULLA CARATTERIZZAZIONE  
DI MEZZI ANISOTROPI DIELETTRICI  
ED ELASTICI (MULTISTRATO E POLICRISTALLI)

Stefano Giordano

Beliani, Dicembre 2007 / Gennaio 2008

MULTISTRATO DIELETTRICO . . . . . 2

MULTISTRATO ELASTICO . . . . . 16

POLICRISTALLO DIELETTRICO . . . . . 22

POLICRISTALLO ELASTICO . . . . . 39

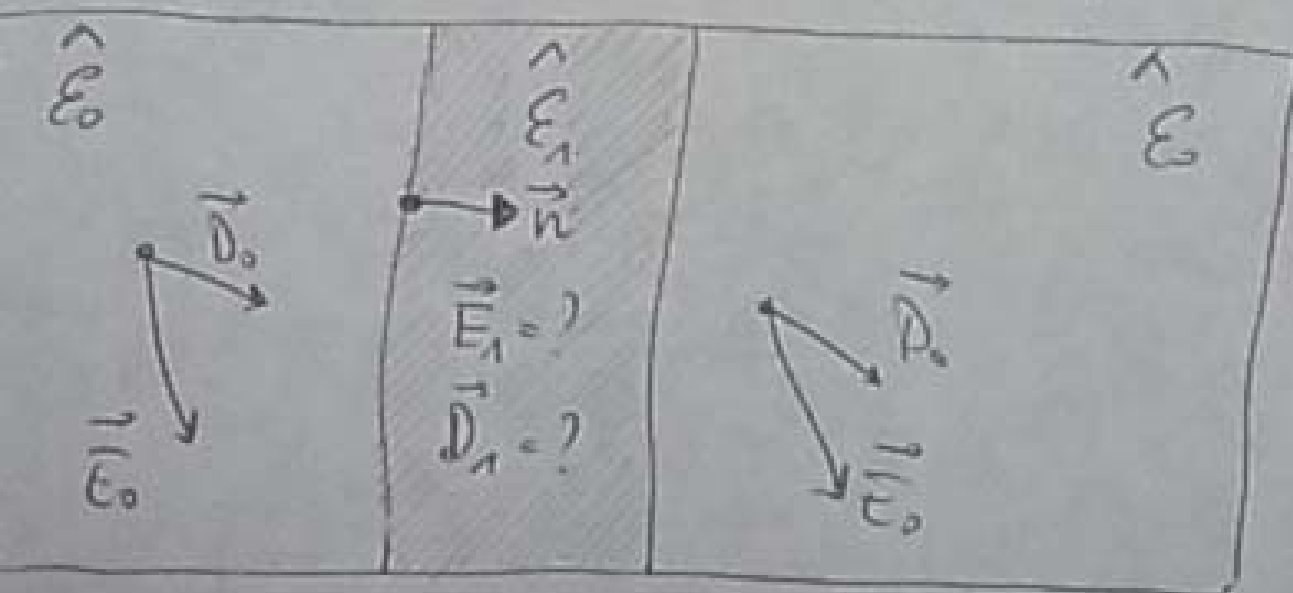
# MULTISTRATO DIELETTRICO

(2)

## 1. SINGOLO STRATO ANISOTROPO IN UN MEZZO ANISOTROPO

Consideriamo uno strato di permittività tensoriale  $\hat{\epsilon}_1$  immerso in un mezzo di permittività  $\hat{\epsilon}_0$ .

Siano  $\vec{E}_0$  e  $\vec{D}_0$  il campo elettrico e lo spostamento elettrico esistenti nello spazio esterno allo strato (uniformi) ed  $\vec{E}_1$  e  $\vec{D}_1$  i campi interni (uniformi).



Ordiniamo i campi interni in funzione  
 dei campi esterni, sia  $\vec{n}$  il vettore normale  
 alla interfaccia dello strato. (3)

La componente normale di  $\vec{D}_0$  e  
 quella tangenziale di  $\vec{E}_0$  saranno  
 continue alle interfacce.

$\vec{D}_0$  ed  $\vec{E}_0$  si scompungono come  
 segue.

$$\begin{cases} \vec{D}_0 = \overbrace{(\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n}}^{\text{continuo}} + [\vec{D}_0 - (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n}] \\ \vec{E}_0 = (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \underbrace{[\vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n}]}_{\text{continuo}} \end{cases}$$

Quindi i campi interni possono  
 essere sviluppati come segue.

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{X} \text{ con } \vec{X} \perp \vec{n} \\ \vec{E}_1 = [\vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \vec{Y} \text{ con } \vec{Y} \parallel \vec{n} \\ \vec{D}_1 = \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_1 \end{cases}$$

Dalle precedenti possiamo trovare

(4)

le incognite  $\vec{X}$  ed  $\vec{Y}$  infatti:

$$\vec{D}_1 = \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_1 \Rightarrow (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{X} = \hat{\epsilon}_1 \left[ \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{Y} \right]$$

Essendo  $\vec{X} \perp \vec{n}$  si ha  $\vec{X} \cdot \vec{n} = 0$  ed

essendo  $\vec{Y} \parallel \vec{n}$  si ha  $\vec{Y} = \alpha \vec{n}$  con  
 $\alpha$  scalare incognito. Moltiplicando  
precedente scalarmemente per  $\vec{n}$

$$(\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_1 + \underbrace{\vec{X} \cdot \vec{n}}_0 = (\hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) (\hat{\epsilon}_1 \vec{n}) \cdot \vec{n} + \underbrace{(\hat{\epsilon}_1 \vec{Y}) \cdot \vec{n}}_{\alpha \vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$\vec{D}_0 \cdot \vec{n} = (\hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}) (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) + \alpha \vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}$$

da cui

$$\alpha = \frac{\vec{D}_0 \cdot \vec{n} - (\hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}) (\vec{E}_0 \cdot \vec{n})}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}}$$

ed ancora:

$$\vec{Y} = \alpha \vec{n} = \frac{\vec{D}_0 \cdot \vec{n} - \vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + (\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}) (\vec{E}_0 \cdot \vec{n})}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \vec{n}$$

ora cerchiamo  $\vec{X}$ :

(5)

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \hat{\epsilon}_1 \left[ \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \alpha \vec{n} \right] - (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} = \\ &= \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) (\hat{\epsilon}_1 \vec{n}) + \frac{(\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + (\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}) \vec{E}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \hat{\epsilon}_1 \vec{n} + \\ &\quad - (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} = \\ &= \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + \frac{(\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \hat{\epsilon}_1 \vec{n} - (\vec{D}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n}\end{aligned}$$

allora i campi interni sono:

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + \frac{\vec{D}_0 \cdot \vec{n} - (\hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} (\hat{\epsilon}_1 \vec{n}) \\ \vec{E}_1 = \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \frac{\vec{D}_0 \cdot \vec{n} - (\hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}) \vec{E}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \vec{n} \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + \frac{(\vec{D}_0 - \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \hat{\epsilon}_1 \vec{n} \\ \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \frac{(\vec{D}_0 - \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \hat{\epsilon}_1 \vec{n} \end{cases}$$

6

Infine, visto che  $\vec{D}_0 = \hat{\epsilon}_0 \vec{E}_0$  si ha:

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \hat{\epsilon}_1 \vec{E}_0 + \frac{\vec{n} \cdot (\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_1) \vec{E}_0}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \hat{\epsilon}_1 \vec{n} \\ \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \frac{\vec{n} \cdot (\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_1) \vec{E}_0}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \vec{n} \end{cases}$$

Definiamo il prodotto tensoriale come

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{v} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{v})$$

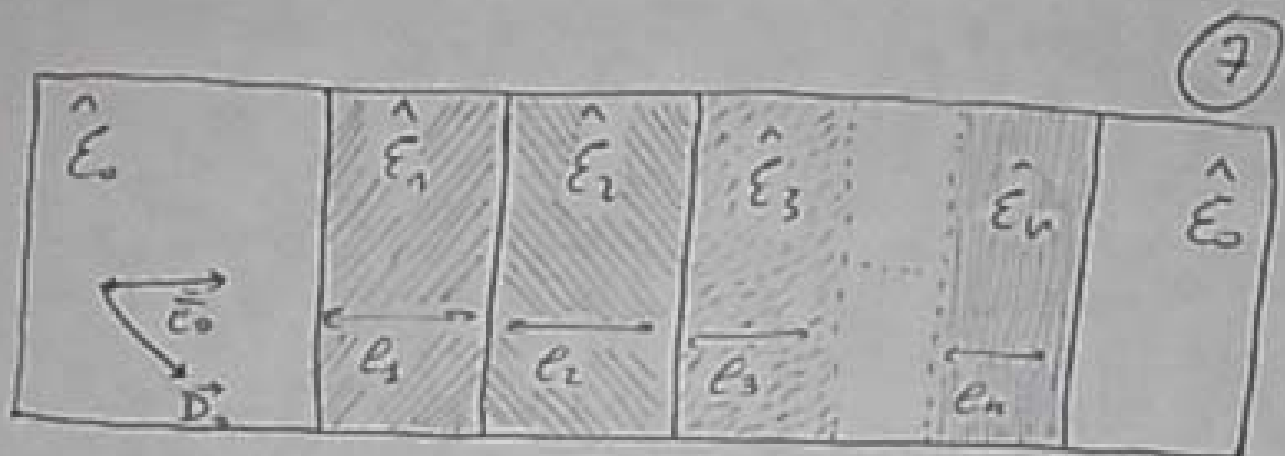
da cui (essendo  $\hat{\epsilon}_0$  ed  $\hat{\epsilon}_1$  simmetrici):

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \left\{ \vec{E}_1 + \frac{(\hat{\epsilon}_1 \vec{n}) \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_1) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \right\} \vec{E}_0 \\ \vec{E}_1 = \left\{ \hat{I} + \frac{\vec{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_1) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_1 \vec{n}} \right\} \vec{E}_0 \end{cases}$$

dove  $\hat{I}$  è il tensore identità.

## 2. MULTISTRATO DIELETTRICO

Consideriamo ora una serie di strati paralleli  $\hat{\epsilon}_1 \dots \hat{\epsilon}_n$  immersi in un mezzo  $\hat{\epsilon}_0$ .



Le funzioni volumetriche  $\epsilon$  e  $\hat{\epsilon}$  si definiscono  
 come  $\frac{c_i l_i}{\sum l_j}$  con cui  $\sum_{i=1}^N c_i = 1$ .

Per quanto visto prima si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{D}_i &= \left\{ \hat{\epsilon}_i + \frac{(\hat{\epsilon}_i \bar{n}) \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \bar{n}]}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}} \right\} \vec{E}_0 \\ \bar{E}_i &= \left\{ \hat{I} + \frac{\bar{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \bar{n}]}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}} \right\} \vec{E}_0 \end{aligned} \right. \quad \forall i$$

I campi med nel mult. strato sono:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \bar{D} \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i \bar{D}_i = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \left\{ \hat{\epsilon}_i + \frac{(\hat{\epsilon}_i \bar{n}) \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \bar{n}]}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}} \right\} \right\} \vec{E}_0 \\ \langle \bar{E} \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i \bar{E}_i = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \left\{ \hat{I} + \frac{\bar{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \bar{n}]}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}} \right\} \right\} \vec{E}_0 \end{aligned} \right.$$

Si definisce la permittività effettiva  $\hat{\epsilon}_{eff}$  (8) come  $\hat{\epsilon}_{eff}$  tale da  $\langle \vec{D} \rangle = \hat{\epsilon}_{eff} \langle \vec{E} \rangle$ .

Dalla seconda delle precedenti si ha:

$$\vec{E}_0 = \left\{ \hat{I} + \sum_{i=1}^N \hat{\epsilon}_i \frac{\vec{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}} \right\}^{-1} \langle \vec{E} \rangle$$

Sostituendo nella prima si ottiene:

$$\langle \vec{D} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^N \epsilon_i \left\{ \hat{\epsilon}_i + \frac{(\hat{\epsilon}_i \vec{n}) \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}} \right\} \right\} \left\{ \hat{I} + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{\vec{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}} \right\}^{-1} \langle \vec{E} \rangle$$

Cioè:

$$\hat{\epsilon}_{eff} = \left\{ \sum_{i=1}^N \epsilon_i \hat{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{(\hat{\epsilon}_i \vec{n}) \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}} \right\} \left\{ \hat{I} + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{\vec{n} \otimes [(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}]}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}} \right\}^{-1}$$

Le precedenti e' coerenti solo se risulta indipendente da  $\hat{\epsilon}_0$  (ammissibile cioè simmetrica ed invertibile). La matrice inversa che appare in  $\hat{\epsilon}_{eff}$  può essere scritta

$$\text{come } \left\{ \hat{I} + \vec{n} \otimes \vec{m} \right\}^{-1} \text{ dove } \vec{m} = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{(\hat{\epsilon}_0 - \hat{\epsilon}_i) \vec{n}}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{n}}$$



Lemma:

(9)

$$\left\{ \hat{I} + \vec{n} \otimes \vec{m} \right\}^{-1} = \hat{I} - \frac{\vec{n} \otimes \vec{m}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}}$$

dim.

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{I} + \vec{n} \otimes \vec{m} \right\} \left\{ \hat{I} - \frac{\vec{n} \otimes \vec{m}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}} \right\} = \\ & = \hat{I} + \vec{n} \otimes \vec{m} - \frac{\vec{n} \otimes \vec{m}}{1 + \vec{m} \cdot \vec{n}} - \frac{(\vec{n} \otimes \vec{m})(\vec{n} \otimes \vec{m})}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}} = * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ма } (\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{c} \otimes \vec{d}) \vec{v} &= \\ &= (\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{c} (\vec{d} \cdot \vec{v}) = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{d} \cdot \vec{v}) \\ &= (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} (\vec{d} \cdot \vec{v}) = (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \otimes \vec{d}) \vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{сое } (\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{c} \otimes \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \otimes \vec{d}) \text{ allora:}$$

$$* = \hat{I} + \vec{n} \otimes \vec{m} - \frac{\vec{n} \otimes \vec{m}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{m}) \vec{n} \otimes \vec{m}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}} =$$

$$= \hat{I} + \frac{(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}) \vec{n} \otimes \vec{m} - \vec{n} \otimes \vec{m} - (\vec{n} \cdot \vec{m}) (\vec{n} \otimes \vec{m})}{1 + \vec{n} \cdot \vec{m}} = \hat{I}$$

c.v.d.

Quindi ci può sviluppare  $\hat{\mathbf{E}}_{\text{eff}}$  :

(10)

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{E}}_{\text{eff}} &= \left\{ \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \right\} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \right\}^{-1} \\
 &= \left\{ \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \right\} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{I}} - \frac{\sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}}{1 + \sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}} \right\} \\
 &= \left\{ \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \right\} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{I}} - \frac{\sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} \sum_i \frac{\epsilon_i}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}} \right\} \\
 &= \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} - \sum_j \epsilon_j \hat{\mathbf{E}}_j \cdot \left[ \frac{\sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \otimes \sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} \sum_i \frac{\epsilon_i}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}} \right] + \\
 &\quad - \sum_j \epsilon_j \frac{(\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_j - \hat{\mathbf{E}}_j) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}} \cdot \frac{\sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i) \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} \sum_i \frac{\epsilon_i}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}} = \\
 &= \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} - \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} + \\
 &\quad - \sum_j \epsilon_j \frac{(\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}} + \sum_j \epsilon_j \frac{(\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}} \cdot \frac{1}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} \sum_i \frac{\epsilon_i}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}} +
 \end{aligned}$$

$$- \left[ \sum_J G \frac{(\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_J \bar{n}} - \sum_J G \frac{(\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}} \right]$$

$$= \left[ \frac{\sum_J G \frac{\bar{n} \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_J \bar{n}}}{\bar{n} \hat{\epsilon}_0 \bar{n} \sum_K \frac{C_K}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_K \bar{n}}} - \frac{\sum_J G \frac{\bar{n} \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}}}{\bar{n} \hat{\epsilon}_0 \bar{n} \sum_K \frac{C_K}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_K \bar{n}}} \right] =$$

$$= \sum_i G \hat{\epsilon}_i + \sum_i G \frac{(\hat{\epsilon}_i \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \hat{\epsilon}_i \bar{n}} - \sum_i G \frac{(\hat{\epsilon}_i \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}} +$$

$$- \sum_J G \frac{(\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{\bar{n} \hat{\epsilon}_0 \bar{n}} + \sum_J \frac{(\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_i \bar{n})}{(\bar{n} \hat{\epsilon}_i \bar{n}) (\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_0 \bar{n}) \sum_K \frac{C_K}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_K \bar{n}}} +$$

$$- \sum_J G \frac{(\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_0 \bar{n}) (\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{(\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}) (\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_0 \bar{n})} + \sum_J G \frac{(\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}) (\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_0 \bar{n})}{(\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}) (\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_0 \bar{n})} +$$

$$+ \sum_i \sum_J C_i G \frac{(\bar{n} \hat{\epsilon}_0 \bar{n}) (\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_i \bar{n})}{(\bar{n} \hat{\epsilon}_i \bar{n}) (\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}) (\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_0 \bar{n}) \sum_K \frac{C_K}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_K \bar{n}}} +$$

$$- \sum_i \sum_J \frac{(\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_i \bar{n}) (\hat{\epsilon}_J \bar{n}) \otimes (\hat{\epsilon}_i \bar{n})}{(\bar{n} \hat{\epsilon}_J \bar{n}) (\bar{n} \hat{\epsilon}_i \bar{n}) \sum_K \frac{C_K}{\bar{n} \cdot \hat{\epsilon}_K \bar{n}}} (\bar{n} \hat{\epsilon}_0 \bar{n})$$

Quindi infine:

(12)

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{eff}} = \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i - \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} +$$

$$+ \sum_i \sum_j \epsilon_i \epsilon_j \frac{(\hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}})}{(\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \cdot \bar{\mathbf{n}}) (\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}})} \cdot \frac{1}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}}} \quad (a)$$

che risulta essere indipendente da  $\hat{\mathbf{E}}_0$  e che rappresenta un risultato esatto.

L'espressione di pag. 8 è quindi invariante per tensori  $\hat{\mathbf{E}}_0$  simmetrici ed invertibili. Può essere utile calcolare  $\hat{\mathbf{E}}_{\text{eff}}$  dalle relazioni di pag. 8 ponendo  $\hat{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{I}}$ . Ne risulta una formula particolarmente simmetrica:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{eff}} = \left\{ \sum_i \epsilon_i \hat{\mathbf{E}}_i + \sum_i \epsilon_i \frac{(\hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}) \otimes [(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{E}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \right\} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{I}} + \sum_i \epsilon_i \frac{\bar{\mathbf{n}} \otimes [(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{E}}_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}]}{\bar{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}} \right\}^{-1} \quad (b)$$

Si noti che  $\hat{\epsilon}_0 = \hat{I}$  crea problemi sulle  
 unità di misura ma ciò ha effetti  
 su risultati. Si noti anche che nelle  
 relazioni a pag. 8 l'invarianza del  
 risultato al variare di  $\hat{\epsilon}_0$  (simmetrica e  
 invertibile) può essere usata come check  
 delle procedure numeriche durante  
 l'implementazione

Come caso particolare studiamo infine  
 il caso di mezzi isotropi in ogni strato  
 della struttura. Si assume quindi

$$\hat{\epsilon}_i = \epsilon_i \hat{I}$$

dove  $\epsilon_i$  rappresenta la permittività  
 scalare del mezzo  $i$ -esimo.

Dalla relazione (2) otteniamo il tensore  $\hat{\epsilon}_{eff}$   
 come segue. Si noti che  $\vec{n} \hat{\epsilon}_i \vec{n} = \epsilon_i \vec{n} \cdot \vec{n}$

Si ha:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{eff} &= \sum_i \epsilon_i \cdot \hat{E}_i - \sum_i \epsilon_i \cdot \frac{(\hat{E}_i \cdot \vec{n}) \otimes (\hat{E}_i \cdot \vec{n})}{\epsilon_i} + \\ &+ \sum_i \sum_j \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot \frac{\hat{E}_i \cdot \hat{E}_j \cdot \vec{n} \otimes \vec{n}}{\epsilon_i \cdot \epsilon_j} \cdot \frac{1}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k}} = \\ &= \sum_i \epsilon_i \cdot \hat{E}_i - \sum_i \epsilon_i \cdot \hat{E}_i \cdot \vec{n} \otimes \vec{n} + \frac{1}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k}} \vec{n} \otimes \vec{n} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{E}_{eff} = \sum_i \epsilon_i \cdot \hat{E}_i \cdot (\hat{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) + \frac{1}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k}} \vec{n} \otimes \vec{n}$$

Si noti che appare la permittività effettiva dei condensatori in parallelo  $\sum_i \epsilon_i \cdot \hat{E}_i$  e quella dei condensatori in serie  $\frac{1}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k}}$  come doveva essere per argomenti elementari.

Infine mostriamo l'applicazione della relazione (a) = (b) ai 'proced materials' ove i

tensori  $\hat{\epsilon}_i$  dipendono in continuità

dalla variabile spaziale  $\xi$  nella direzione  $\vec{n}$ ,

cioè  $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(\xi)$ .

$$\hat{\epsilon}_{eff} = \frac{1}{l} \int_0^l \left[ \hat{\epsilon}(\xi) - \frac{(\hat{\epsilon}(\xi)\vec{n}) \otimes (\hat{\epsilon}(\xi)\vec{n})}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}(\xi)\vec{n}} \right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{l} \frac{\int_0^l \int_0^l \frac{(\hat{\epsilon}(\xi)\vec{n}) \otimes (\hat{\epsilon}(\eta)\vec{n}) d\xi d\eta}{[\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}(\xi)\vec{n}] [\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}(\eta)\vec{n}]}}{\int_0^l \frac{d\xi}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon}(\xi)\vec{n}}}$$

Analogamente si scrive la relazione (b).

# MULTISTRATO ELASTICO

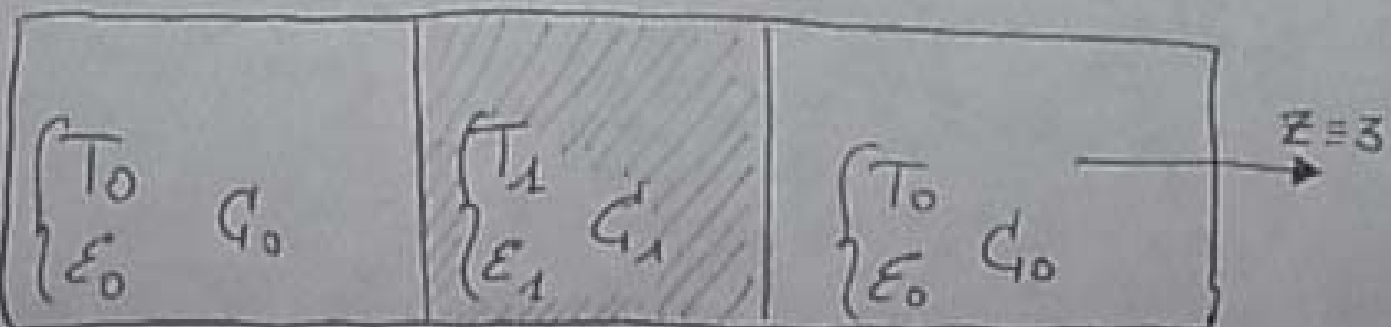
(16)

## 1. Singolo strato anisotropo in metto anisotropo

Condensiamo un singolo strato anisotropo di stiffness  $G_1$  in un mezzo esterno anisotropo di stiffness  $G_0$ . Adottiamo la convenzione di Voigt per cui stress e strain si rappresentano come vettori:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}$$

per cui  $T = G_1 E$  nello strato e  $T = G_0 E$  fuori. Le matrici  $G_0$  e  $G_1$  sono  $6 \times 6$  simmetriche ed invertibili.





(17)

Dati  $\epsilon_0$  e  $T_0 = G_0 \epsilon_0$  cerchiamo i  
comp. interm.  $\epsilon_1$  e  $T_1$  quando le  
interfacce sono ortogonali all'ass  $z$  (r 3).

Le parti continue di stress sono

$T_{33}$ ,  $T_{23}$  e  $T_{13}$  (perché  $\hat{T} \vec{n}$  è continuo).

Le parti continue di strain sono

$\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  ed  $\epsilon_{12}$  (perché lo spostamento  
 $\vec{u}$  è continuo all'interfaccia).

Definiamo:

$$P_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (l = \text{longitudinale})$$

$$P_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (t = \text{trasversale})$$

Così  $P_l^T$  ha le componenti continue  
dello stress e  $P_t E$  ha le componenti  
continue dello strain. Cioè:

$$P_e T = \begin{bmatrix} T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Componenti} \\ \text{longitudinali} \end{array}$$

$$P_t \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Componenti} \\ \text{trasversali} \end{array}$$

Inoltre i vettori  $P_e^T P_e T$  e  $P_t^T P_t \varepsilon$  sono vettori di stress e strain contenenti solo le componenti continue:

$$P_e^T P_e T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{33} \\ 0 \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix}; \quad P_t^T P_t \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici di proiezione verificano  
la identità:

$$\begin{array}{ll} P_e P_e^T = I_3; & P_t P_t^T = I_3 \\ P_e P_t^T = O_3; & P_t P_e^T = O_3 \\ P_t^T P_t + P_e^T P_e = I_6 \end{array}$$

All'interno dello strato si deve avere:

(19)

$$T_1 = P_e^T P_e T_0 + P_t^T X \quad (*)$$

$$E_1 = P_t^T P_t E_0 + P_e^T Y \quad (**)$$

$$T_1 = G_1 E_1$$

$X$  e  $Y$  sono vettori incogniti a 3 componenti che contengono rispettivamente la parte trasversale dello stress e la parte longitudinale dello strain.

Dobbiamo determinare  $X$  ed  $Y$  ( $\in \mathbb{R}^3$ ).

Dalla relazione costitutiva  $T_1 = G_1 E_1$  si ha

$$P_e^T P_e T_0 + P_t^T X = G_1 P_t^T P_t E_0 + G_1 P_e^T Y$$

Applico  $P_e$  alla precedente (che ne estrae le componenti longitudinali):

(20)

$$\underbrace{P_e P_e^T}_{I_3} P_e T_0 + \underbrace{P_e P_t^T}_{O_3} X = P_e G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0 + P_e G_1 P_e^T Y$$

Quindi:

$$P_e T_0 = P_e G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0 + P_e G_1 P_e^T Y$$

da cui

$$P_e T_0 - P_e G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0 = (P_e G_1 P_e^T) Y$$

ed allora:

$$Y = (P_e G_1 P_e^T)^{-1} [P_e T_0 - P_e G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0]$$

Da (\*) si ha:

$$P_t^T X = T_1 - P_e^T P_e T_0 = G_1 \varepsilon_1 - P_e^T P_e T_0 =$$

$$= G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0 + G_1 P_e^T Y - P_e^T P_e T_0 =$$

$$= G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0 - P_e^T P_e T_0 + G_1 P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} \cdot$$

$$\cdot [P_e T_0 - P_e G_1 P_t^T P_t \varepsilon_0]$$

Quindi:

(21)

$$\begin{aligned} T_1 &= P_e^T P_e G_0 E_0 + C_1 P_t^T P_t E_0 - P_e^T P_e C_0 E_0 + \\ &+ C_1 P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_0 E_0 - C_1 P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e C_1 P_e^T P_t E_0 \\ &= \left[ C_1 P_t^T P_t + C_1 P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - C_1 P_t^T P_t) \right] E_0 \end{aligned}$$

ed ancora

$$\begin{aligned} E_1 &= P_t^T P_t E_0 + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} [P_e T_0 - P_e G_1 P_t^T P_t E_0] = \\ &= \left[ P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - C_1 P_t^T P_t) \right] E_0 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{cases} T_1 = C_1 \left[ P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - C_1 P_t^T P_t) \right] E_0 \\ E_1 = \left[ P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - C_1 P_t^T P_t) \right] E_0 \end{cases}$$

La matrice in questione nelle precedenti  
 si può elaborare come segue:

(22)

$$\begin{aligned}
 & P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_1 P_t^T P_t) = \\
 & = P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_0 + \\
 & \quad - P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_1 \underbrace{P_t^T P_t}_{I_6 - P_t^T P_t} = \\
 & = P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_0 + \\
 & \quad - P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_1 (I_6 - P_t^T P_t) = \\
 & = P_t^T P_t + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_0 + \\
 & \quad - P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e G_1 + \underbrace{P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} (P_e G_1 P_e^T) P_e}_I = \\
 & = \underbrace{P_t^T P_t + P_e^T P_e}_{I_6} + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_1) = \\
 & = I_6 + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_1)
 \end{aligned}$$

In fine.

(23)

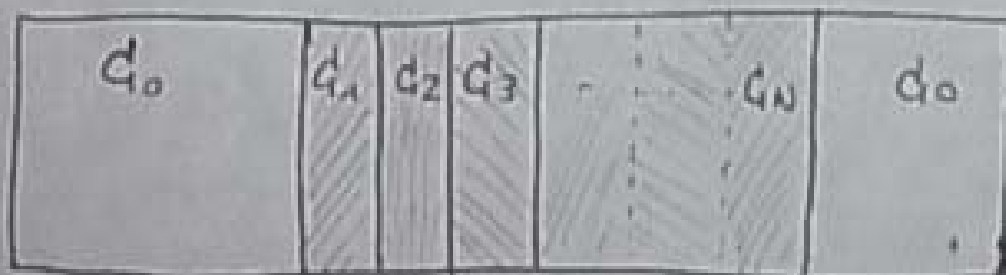
$$T_1 = G_1 \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_1) \right] E_0$$

$$E_1 = \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_1 P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_1) \right] E_0$$

È importante notare che un singolo operatore di proiezione  $P_e$  è sufficiente a determinare i campi interni  $T_1$  ed  $E_1$ , in funzione di  $E_0$ . Si noti anche che quando  $G_0 = G_1$  si ha  $T_1 = T_0$  ed  $E_1 = E_0$  come deve essere.

## 2. Multistrato Elastico

Consideriamo una struttura ad  $N$  strati.



Si pone

$$A_i = I_6 + P_e^T (P_e G_i P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_i)$$

(24)

da cui per quanto visto al  
paragrafo precedente:

$$T_i = G_i A_i E_0$$

$$E_i = A_i E_0$$

quindi

$$\begin{cases} \langle T \rangle = \left( \sum_{i=1}^N c_i G_i A_i \right) E_0 \\ \langle E \rangle = \left( \sum_{i=1}^N c_i A_i \right) E_0 \end{cases}$$

Dalla seconda:

$$E_0 = \left[ \sum_{i=1}^N c_i A_i \right]^{-1} \langle E \rangle$$

che, posta nella prima

$$\langle T \rangle = \left[ \sum_{i=1}^N c_i G_i A_i \right] \left[ \sum_{i=1}^N c_i A_i \right]^{-1} \langle E \rangle$$



ed allora

(25)

$$G_{\text{eff}} = \left[ \sum_{i=1}^N \kappa_i G_i A_i \right] \left[ \sum_{i=1}^N \kappa_i B_i \right]^{-1}$$

esplicitamente:

$$G_{\text{eff}} = \left\{ \sum_{i=1}^N \kappa_i G_i \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_i P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_i) \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \kappa_i G_i \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_i P_e^T)^{-1} P_e (G_0 - G_i) \right] \right\}^{-1}$$

Come nel caso di elettrico  $G_{\text{eff}}$  (a)  
risulta essere invariante ad ogni  $G_0$   
simmetrica ed invertibile e quindi  
si può porre  $G_0 \equiv I_6$  ottenendo:

$$G_{\text{eff}} = \left\{ \sum_{i=1}^N \kappa_i G_i \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_i P_e^T)^{-1} P_e (I_6 - G_i) \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \kappa_i G_i \left[ I_6 + P_e^T (P_e G_i P_e^T)^{-1} P_e (I_6 - G_i) \right] \right\}^{-1}$$

L'invariante di (a) al variare di  $Q_0$  (26)  
 può essere usata per controllare  
 la procedura numerica in fase di  
 implementazione.

Infine, la teoria può essere applicata  
 al caso di 'graded material'  
 sostituendo  $Q_i$  con  $Q(z)$ :

$$Q_{\text{eff}} = \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l Q(z) [I_0 + P^T (P Q(z) P^T)^{-1} P (I_0 - C(z))] dz \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l [I_0 + P^T (P Q(z) P^T)^{-1} P (I_0 - C(z))] dz \right\}^{-1}$$

Se  $Q(z)$  rappresenta un mezzo isotropo  $\forall z$   
 il mezzo risultante  $Q_{\text{eff}}$  risulterà trasverso  
 isotropo lungo l'axe  $z$  e si possono trovare  
 facilmente i corrispondenti parametri di Hill.

# POLICRISTALLO DIELETTRICO

(27)

## 1. SINGOLA SFERA ANISOTROPA

ORIENTATA CASUALMENTE NEL MEZZO

OMOGENEO ISOTROPO

Consideriamo una sfera di tensore dielettrico  $\hat{\epsilon}$  orientata casualmente in un mezzo isotropo di permittività  $\epsilon_0$ . Sia  $\vec{E}_0$  il campo applicato esternamente (uniforme nello spazio in assenza dell'inclusione sferica) e sia  $\vec{E}_d$  il campo indotto dentro alla sfera. Siano  $\vec{D}_0$  e  $\vec{D}_d$  i corrispondenti vettori di spostamento elettrico. Per una fissata orientazione si ha:

$$\begin{cases} \vec{E}_d = 3\epsilon_0 [\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0 \hat{I}]^{-1} \vec{E}_0 \\ \vec{D}_d = 3\epsilon_0 \hat{\epsilon} [\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0 \hat{I}]^{-1} \vec{E}_0 \end{cases}$$

Per una arbitraria rotazione descritta dalla (28)  
matrice  $\hat{R}$  si ha quindi:

$$\begin{aligned}\vec{E}_d &= 3\epsilon_0 [\hat{R}\hat{\epsilon}\hat{R}^{-1} + 2\epsilon_0\hat{I}]^{-1}\vec{E}_0 = \\ &= 3\epsilon_0 [\hat{R}(\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0\hat{I})\hat{R}^{-1}]^{-1}\vec{E}_0 = \\ &= 3\epsilon_0 \hat{R} [\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0\hat{I}]^{-1} \hat{R}^{-1} \vec{E}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{D}_d &= 3\epsilon_0 \hat{R}\hat{\epsilon}\hat{R}^{-1} [\hat{R}\hat{\epsilon}\hat{R}^{-1} + 2\epsilon_0\hat{I}]^{-1}\vec{E}_0 = \\ &= 3\epsilon_0 \hat{R}\hat{\epsilon}\underbrace{\hat{R}^{-1}\hat{R}}_{\hat{I}} [\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0\hat{I}]^{-1} \hat{R}^{-1} \vec{E}_0 = \\ &= 3\epsilon_0 \hat{R} \hat{\epsilon} [\hat{\epsilon} + 2\epsilon_0\hat{I}]^{-1} \hat{R}^{-1} \vec{E}_0\end{aligned}$$

Ora, essendo presenti  $\hat{R}$  che descrive l'orientamento,  $\hat{\epsilon}$  può essere considerata diagonale senza limitare l'applicabilità di questi passaggi; siano allora  $\epsilon_1, \epsilon_2$  ed  $\epsilon_3$  le permittività principali (autovalori) di  $\hat{\epsilon}$ .

$$E_{di} = 3 \epsilon_0 R_{ik} (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} \delta_{kl} R_{lj}^{-1} E_{0j} =$$

$$= 3 \epsilon_0 R_{ik} (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} \delta_{kl} R_{jl} E_{0j} =$$

$$= 3 \epsilon_0 R_{ik} (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} R_{jk} E_{0j}$$

$$D_{di} = 3 \epsilon_0 R_{ik} \epsilon_k \delta_{kl} (\epsilon_l + 2\epsilon_0)^{-1} \delta_{ls} R_{sj}^{-1} E_{0j} =$$

$$= 3 \epsilon_0 R_{ik} \epsilon_k (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} \delta_{ks} R_{sj}^{-1} E_{0j} =$$

$$= 3 \epsilon_0 R_{ik} \epsilon_k (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} R_{jk} E_{0j}$$

che viene rispetto alle orientazioni:

$$\langle E_{di} \rangle = 3 \epsilon_0 \langle R_{ik} R_{jk} \rangle (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} E_{0j}$$

$$\langle D_{di} \rangle = 3 \epsilon_0 \langle R_{ik} R_{jk} \rangle \epsilon_k (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} E_{0j}$$

ma  $\langle R_{ik} R_{jk} \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$  quindi

$$\langle E_{di} \rangle = \epsilon_0 \sum_k (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} E_{0i}$$

$$\langle D_{di} \rangle = \epsilon_0 \sum_k \epsilon_k (\epsilon_k + 2\epsilon_0)^{-1} E_{0i}$$

Infine:

(30)

$$\langle \vec{E}_d \rangle = \epsilon_0 \sum_K \frac{1}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

$$\langle \vec{D}_d \rangle = \epsilon_0 \sum_K \frac{\epsilon_K}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

È utile definire gli invarianti del tensore di permittività (da suoi autovalori coefficienti del suo polinomio caratteristico) come segue.

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\hat{\epsilon}) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} \hat{\epsilon})^2 - \text{Tr}(\hat{\epsilon}^2)] = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3 \\ I_3 = \det \hat{\epsilon} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \sum_K \frac{1}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} = \frac{I_2 + 4\epsilon_0 I_1 + 12\epsilon_0^2}{I_3 + 2\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 8\epsilon_0^3} \\ \sum_K \frac{\epsilon_K}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} = \frac{3I_3 + 4\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1}{I_3 + 2\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 8\epsilon_0^3} \end{cases}$$

Quando una magda sfera anisotropa  $\hat{\epsilon}$  immersa in  $\epsilon_0$  ha una permittività equivalente pari al seguente rapporto quando  $\hat{\epsilon}$  è orientata casualmente:

$$\frac{\langle \vec{D}_d \rangle}{\langle \vec{E}_d \rangle} = \frac{3I_3 + 4\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1}{I_2 + 4\epsilon_0 I_1 + 12\epsilon_0^2}$$

## 2. Dispersione di sfere anisotrope

Consideriamo una dispersione (o sospensione) di sfere anisotrope orientate casualmente e distribuite uniformemente in un mezzo omogeneo isotropo di costante  $\epsilon_0$ . Nel limite di basse concentrazioni  $\kappa$  si ha:

$$\langle \vec{E} \rangle = \kappa \langle \vec{E}_d \rangle + (1-\kappa) \vec{E}_0 \quad (*)$$

Cioè

$$\langle \vec{E} \rangle = \left[ \kappa \epsilon_0 \frac{\epsilon}{\kappa \epsilon_r + 2\epsilon_0} + 1 - \kappa \right] \vec{E}_0$$

Il valore medio della spostamento elettrico  $\vec{D}$  viene calcolato come segue.

(32)

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{D} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{V(\text{totale})} \hat{\epsilon} \vec{E} d\tau = \frac{1}{V} \epsilon \int_{V_D(\text{fuori})} \vec{E} d\tau + \\
 &+ \frac{1}{V} \int_{V_c(\text{dentro})} \hat{\epsilon} \vec{E} d\tau + \frac{1}{V} \epsilon \int_{V_c} \vec{E} d\tau - \frac{1}{V} \epsilon_0 \int_{V_c} \vec{E} d\tau = \\
 &= \frac{1}{V} \epsilon_0 \int_V \vec{E} d\tau + \frac{1}{V} \int_{V_c} (\hat{\epsilon} - \epsilon_0 \hat{I}) \vec{E} d\tau = \\
 &= \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \rho \langle \vec{D}_d \rangle - \rho \epsilon_0 \langle \vec{E}_d \rangle = \\
 &= \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \rho \epsilon_0 \sum \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 + \\
 &- \rho \epsilon_0 \sum \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\langle \vec{D} \rangle = \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \rho \epsilon_0 \sum \frac{\epsilon_k - \epsilon_0}{\epsilon_k + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

$$\langle \vec{E} \rangle = \left[ \left( \epsilon_0 \sum \frac{1}{\epsilon_k + 2\epsilon_0} + 1 - \rho \right) \right] \vec{E}_0$$



dalle ultime due si ottiene  $\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\langle \vec{D} \rangle}{\langle \vec{E} \rangle}$ . (33)

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_0 \left[ \frac{1 + c \frac{\frac{\epsilon_K - \epsilon_0}{\epsilon_K + 2\epsilon_0}}{\frac{c}{K} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} + 1 - c}}{1 - c \frac{\frac{\epsilon_K - \epsilon_0}{\epsilon_K + 2\epsilon_0}}{\frac{c}{K} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_K + 2\epsilon_0} + 1 - c}} \right]$$

In funzione degli invarianti:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_0 \frac{8\epsilon_0^3 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 2\epsilon_0 I_2 + I_3 + 2c(I_3 + \epsilon_0 I_2 - 4\epsilon_0^3)}{8\epsilon_0^3 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 2\epsilon_0 I_2 + I_3 - c(I_3 + \epsilon_0 I_2 - 4\epsilon_0^3)}$$
$$= \epsilon_0 \frac{1 + 2c\alpha}{1 - c\alpha}$$

con  $\alpha = \frac{I_3 + \epsilon_0 I_2 - 4\epsilon_0^3}{I_3 + 2\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 8\epsilon_0^3}$

per piccole frazioni volumetriche  $c$ :

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_0 \frac{1 + 2c\alpha}{1 - c\alpha} \approx \epsilon_0 (1 + 2c\alpha)(1 + c\alpha) \approx \epsilon_0 (1 + 3c\alpha)$$

Cioè:

(34)

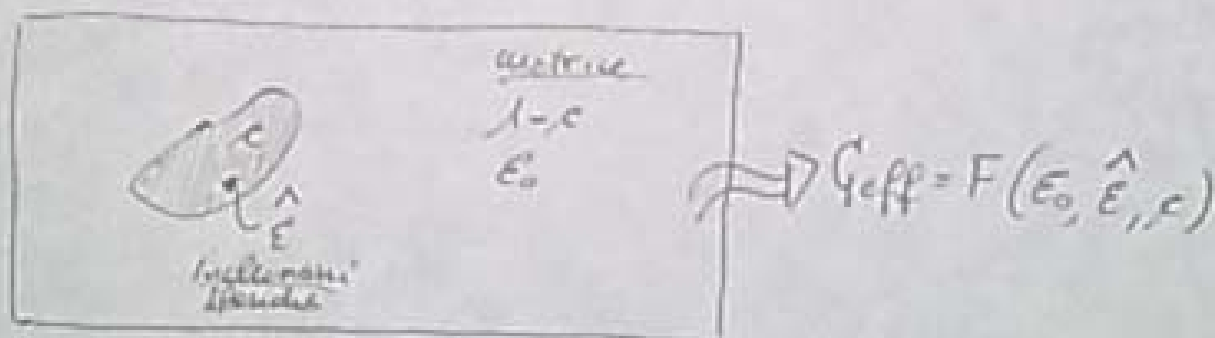
$$\epsilon_{\text{eff}} \approx \epsilon_0 \left[ 1 + \epsilon \frac{3I_3 + 3\epsilon_0 I_2 - 12\epsilon_0^3}{I_3 + 2\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 8\epsilon_0^3} \right]$$

ed ancora:

$$\left. \frac{\partial \epsilon_{\text{eff}}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 3\epsilon_0 \frac{I_3 + \epsilon_0 I_2 - 4\epsilon_0^3}{I_3 + 2\epsilon_0 I_2 + 4\epsilon_0^2 I_1 + 8\epsilon_0^3} \quad (*)$$

### 3. Policristalli dielettrici multicomponenti

Nel precedente paragrafo abbiamo risolto il seguente problema:



La funzione  $F$  è valida solo per piccole concentrazioni e quindi conoscendo esattamente  $\left. \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$  che verrà usata in questo contesto.

Consideriamo quindi un policonstallo  
 formato da grani anisotropi presi  
 da  $N$  materiali differenti:  $\hat{\epsilon}_1 \dots \hat{\epsilon}_N$   
 aventi  $N$  frazioni volumetriche  $c_1 \dots c_N$   
 tali che  $\sum_{i=1}^N c_i = 1$ . Ciò significa che  
 ogni grano (o volume arbitrario) ha tenore  $\hat{\epsilon}_i$   
 con probabilità  $c_i$ .

Supponiamo di avere  $1 \text{ m}^3$  di policonstallo  
 con  $\hat{\epsilon}_1 \dots \hat{\epsilon}_N$  e  $c_1 \dots c_N$ . Aggiungiamo  $d \text{ m}^3$   
 di materiale  $\hat{\epsilon}_i$ . Allora, osservando il  
 materiale originale con permittività  $\epsilon_{\text{eff}}$  si  
 ha

$$\epsilon_{\text{eff}}^i = F(\epsilon_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, \frac{dc}{1+dc}) \approx$$

$$\approx F(\epsilon_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, dc) \approx \epsilon_{\text{eff}} + \frac{\partial F}{\partial c}(\epsilon_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, 0) dc$$

Svolgendo questa operazione per ogni  
indice  $i$  e facendo la media  
pesata con le probabilità.

(36)

$$E_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^N \kappa_i E_{\text{eff}}^i = \sum_{i=1}^N \kappa_i \left[ E_{\text{eff}} + \frac{\partial F}{\partial \rho} (E_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, 0) d\epsilon \right]$$
$$= \left( \sum_{i=1}^N \kappa_i \right) E_{\text{eff}} + \sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{\partial F}{\partial \rho} (E_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, 0) d\epsilon$$

ossendo la permittività finale uguale a  
quella iniziale (dopo  $N$  increment.  $\forall i$ ).

Allora  $\kappa_i$  ha:

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{\partial F}{\partial \rho} (E_{\text{eff}}, \hat{\epsilon}_i, 0) = 0$$

che rappresenta un'equazione che  
fornisce  $E_{\text{eff}}$  del policristallo  
mult. componente, utilizzando la

deletione (x) di pag. 34 otteniamo la

Versione esplicita:

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{I_3^i + E_{eff} I_2^i - 4 E_{eff}^3}{I_3^i + 2 E_{eff} I_2^i + 4 E_{eff}^2 I_1^i + 8 E_{eff}^3} = 0$$

dove  $I_1^i$ ,  $I_2^i$  e  $I_3^i$  sono i tre invarianti del tensore  $\hat{E}_i$  -

1° CASO policristallo monocomponente:  $\kappa_1 = 1$

$$I_3 + E_{eff} I_2 - 4 E_{eff}^3 = 0$$

2° CASO policristallo monocomponente poroso:

$$\kappa_1 = 1 - \kappa ; \kappa_2 = \kappa ; I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = 0$$

(utile con conduttività)

$$(1 - \kappa) \frac{I_3 + E_{eff} I_2 - 4 E_{eff}^3}{I_3 + 2 E_{eff} I_2 + 4 E_{eff}^2 I_1 + 8 E_{eff}^3} + \kappa \left( -\frac{1}{2} \right) = 0$$

Tale caso è utile quando si vuole descrivere la conduttività di un policristallo poroso dove uno dei due componenti ha conduttività nulla e l'altro ha tenore di conduttività noto con invarianti  $I_1, I_2$  ed  $I_3$ . Si ha dalla precedente relazione

$$2(1-\kappa) (I_3 + \sigma_{eff} I_2 - 4\sigma_{eff}^3) - \kappa (I_3 + 2\sigma_{eff} I_2 + 4\sigma_{eff}^2 I_1 + 8\sigma_{eff}^3) = 0$$

$$2I_3 + 2\sigma_{eff} I_2 - 8\sigma_{eff}^3 - 2\kappa I_3 - 2\kappa \sigma_{eff} I_2 + 8\kappa \sigma_{eff}^3 +$$

$$-\kappa I_3 - 2\kappa \sigma_{eff} I_2 - 4\kappa \sigma_{eff}^2 I_1 - 8\kappa \sigma_{eff}^3 = 0$$

$$8\sigma_{eff}^3 + 4\kappa \sigma_{eff}^2 I_1 - 2(1-2\kappa)\sigma_{eff} I_2 + (3\kappa-2) I_3 = 0$$

Si osservi che se  $\kappa=0$  si ricade nell'equazione precedente per il policristallo monocristallino non poroso.

# POLICRISTALLO ELASTICO

39

## 1. SINGOLA SFERA ANISOTROPA IN MEZZO ISOTROPO

Consideriamo una sfera anisotropa di  
stiffness  $G_2$  (tensore a 4 indici) avvolta al  
più 24 elementi indipendenti immersa

in un mezzo isotropo di stiffness  $G_1$  avvolta  
al più 2 elementi indipendenti.

(per esempio bulk "K" e shear " $\mu$ ").

È noto che un campo di strain  
esterno uniforme  $E_f$  genera un campo  
interno uniforme  $E_d$  dato da

$$E_d = [I - S(I - C_1^{-1} G_2)]^{-1} E_f$$

dove  $I$  è l'operazione identica ed  $S$  è il  
tensore di Eshelby (dipendente da  $\nu$ , Poisson's ratio)

Vogliamo considerare l'arbitraria orientazione della sfera anisotropa quindi definiamo:

$$(A \otimes B)_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$$

per una coppia di tensori a due indici, per cui:

$$\begin{aligned} [(A \otimes B) \epsilon]_{ij} &= (A \otimes B)_{ijkl} \epsilon_{kl} = \\ &= A_{ik} B_{jl} \epsilon_{kl} = (A \epsilon B^T)_{ij} \end{aligned}$$

Cioè

$$(A \otimes B) \epsilon = A \epsilon B^T$$

Dobbiamo ruotare cosruolmente il tensore  $G_2$  intorno alla sfera. In una data

base sia  $T = G_2 \epsilon$  (con  $T = \text{stress}$ ,  $\epsilon = \text{strain}$ );

in una base ruotata da  $R$  ( $RR^T = R^T R = I_3$ )

sia  $T' = G_2' \epsilon'$ .



(41)

Visto che  $T' = RTR^T$  ed  $E' = RE R^T$

si ha  $RTR^T = C_2' (RE R^T)$ ,

determiniamo allora  $C_2' \leftrightarrow C_2$ :

$$TR^T = R^T C_2' (RE R^T)$$

$$T = R^T C_2' (RE R^T) R =$$

$$= R^T C_2' [(R \otimes R) E] R =$$

$$= \underbrace{[(R^T \otimes R^T) C_2' (R \otimes R)]}_{\text{relazione tra } C_2 \text{ e } C_2'} E = C_2 E$$

Si noti che se  $E' = RE R^T = (R \otimes R) E$

allora  $E = R^T E' R = (R^T \otimes R^T) E'$  e quindi

otteniamo  $(R \otimes R)^{-1} = (R^T \otimes R^T)$ .

Quando la sfera  $G_2$  è arbitrariamente ruotata otteniamo la seguente relazione per il campo di stress interno.

(42)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d &= [I - S(I - C_1^{-1}(R^T \otimes R^T)C_2(R \otimes R))]^{-1} \mathcal{E}_f = \\ &= [I - S(I - \underbrace{(R^T \otimes R^T)C_1^{-1}(R \otimes R)}_I)(R^T \otimes R^T)C_2(R \otimes R)]^{-1} \mathcal{E}_f \end{aligned}$$

Visto che  $C_1$  è isotropo cioè  $C_1^{-1} = (R^T \otimes R^T)C_1^{-1}(R \otimes R)$ .  
Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d &= [I - S(I - (R^T \otimes R^T)C_1^{-1}C_2(R \otimes R))]^{-1} \mathcal{E}_f = \\ &= [I - S(R^T \otimes R^T)(I - C_1^{-1}C_2)(R \otimes R)]^{-1} \mathcal{E}_f = \\ &= [I - (R^T \otimes R^T)S(R \otimes R)(R^T \otimes R^T)(I - C_1^{-1}C_2)(R \otimes R)]^{-1} \mathcal{E}_f \end{aligned}$$

Visto che anche il tensore di Eshelby delle sfere è isotropo. Ancora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d &= [I - (R^T \otimes R^T)S(I - C_1^{-1}C_2)(R \otimes R)]^{-1} \mathcal{E}_f = \\ &= [(R^T \otimes R^T)(I - S(I - C_1^{-1}C_2))(R \otimes R)]^{-1} \mathcal{E}_f = \\ &= (R \otimes R)^{-1} [I - S(I - C_1^{-1}C_2)]^{-1} (R^T \otimes R^T) \mathcal{E}_f. \end{aligned}$$

In fine:

$$E_d = (R^T \otimes R^T) [I - S(I - C_1^{-1} C_2)]^{-1} (R \otimes R) E_f$$

Analogamente lo stress interno

$$T_d = (R^T \otimes R^T) C_2 [I - S(I - C_1^{-1} C_2)]^{-1} (R \otimes R) E_f$$

pongo  $A = [I - S(I - C_1^{-1} C_2)]^{-1}$  per cui:

$$E_d = \begin{matrix} R_{ip} & R_{je} & R_{kn} & R_{hm} & A_{ijkl} & E_{f_{nm}} \end{matrix}$$

$$T_d = \begin{matrix} R_{ip} & R_{je} & R_{kn} & R_{hm} & C_{2,ijkl} & A_{stkh} & E_{f_{nm}} \end{matrix}$$

i cui valori usati sulle orientazioni:

$$\langle E_d \rangle = \langle R_{ip} R_{je} R_{kn} R_{hm} \rangle A_{ijkl} E_{f_{nm}}$$

$$\langle T_d \rangle = \langle R_{ip} R_{je} R_{kn} R_{hm} \rangle C_{2,ijkl} A_{stkh} E_{f_{nm}}$$

Indichiamo per semplicità

(44)

$$\begin{cases} \langle A \rangle_{perm} = \langle R_{ip} R_{jc} R_{kn} R_{lm} \rangle A_{jkch} \\ \langle C_2 A \rangle_{perm} = \langle R_{ip} R_{jc} R_{kn} R_{lm} \rangle C_{2ist} A_{stch} \end{cases}$$

per cui:

$$\begin{cases} \langle E_d \rangle = \langle A \rangle_{perm} E_{sum} \\ \langle T_d \rangle = \langle C_2 A \rangle_{perm} E_{sum} \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \langle E_d \rangle = \langle A \rangle E_p \\ \langle T_d \rangle = \langle C_2 A \rangle E_p \end{cases}$$

Per completezza ricordiamo che  $J_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj})$  e

$$\begin{aligned} \langle R_{jc} R_{ks} R_{lt} R_{ir} \rangle &= \frac{2}{15} \delta_{cc} \delta_{tr} \left[ \delta_{jk} \delta_{li} - \frac{1}{4} (\delta_{jh} \delta_{ki} + \delta_{ji} \delta_{kh}) \right] + \\ &+ \frac{2}{15} \delta_{ct} \delta_{sr} \left[ \delta_{jh} \delta_{ki} - \frac{1}{4} (\delta_{jk} \delta_{li} + \delta_{ji} \delta_{kl}) \right] + \\ &+ \frac{2}{15} \delta_{ct} \delta_{st} \left[ \delta_{jc} \delta_{kt} - \frac{1}{4} (\delta_{jh} \delta_{ki} + \delta_{jk} \delta_{li}) \right] \end{aligned}$$

è mostrata altrove (J. Phys. D. Gronau - Rocchia).

## 2. Dispersione di sfere anisotrope orientate casualmente

Consideriamo ora una dispersione di sfere anisotrope  $G_2$  orientate casualmente in un mezzo isotropo  $G_1$

Analogamente a quanto svolto nel caso dielettrico si dimostrano facilmente le relazioni

$$\begin{cases} \langle E \rangle = c \langle E_d \rangle + (1-c) E_f \\ \langle T \rangle = G_1 \langle E \rangle + c \langle T_d \rangle - c G_1 \langle E_d \rangle \end{cases}$$

La prima è analoga a (\*) di pag. 31 e

la seconda alle (\*\*\*) di pag. 32.

Si ha quindi tramite le relazioni di pag. 44:

$$\langle E \rangle = c \langle A \rangle E_f + (1-c) E_f = [c \langle A \rangle + (1-c) I] E_f$$

$$\langle T \rangle = G_1 \langle E \rangle + c \langle G_2 A \rangle E_f - c G_1 \langle A \rangle E_f$$

cioè:

(46)

$$\begin{cases} \langle E \rangle = [\kappa \langle A \rangle + (1-\kappa) I] E P \\ \langle T \rangle = G_1 \langle E \rangle + \kappa [\langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle] E P \end{cases}$$

dalla prima:

$$E P = [\kappa \langle A \rangle + (1-\kappa) I]^{-1} \langle E \rangle$$

che sostituita nella seconda fornisce:

$$\langle T \rangle = G_1 \langle E \rangle + \kappa [\langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle] [\kappa \langle A \rangle + (1-\kappa) I]^{-1} \langle E \rangle$$

da cui:

$$G_{eff} = G_1 + \kappa [\langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle] [\kappa \langle A \rangle + (1-\kappa) I]^{-1}$$

che rappresenta il materiale effettivo isotropo valido per barre prismatiche volumetriche.

Nel limite di prismatiche volumetriche infinite si ha:

(67)

$$G_{\text{eff}} = G_1 + \rho [\langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle] + o(\rho)$$

Cioè:

$$\left. \frac{dG_{\text{eff}}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle$$

che rappresenta un risultato esatto.

La relazione di mistura può essere

scritta nella forma  $G_{\text{eff}} = F(G_1, G_2, \rho)$

per cui:  $\left. \frac{dF}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \langle G_2 A \rangle - G_1 \langle A \rangle$ .

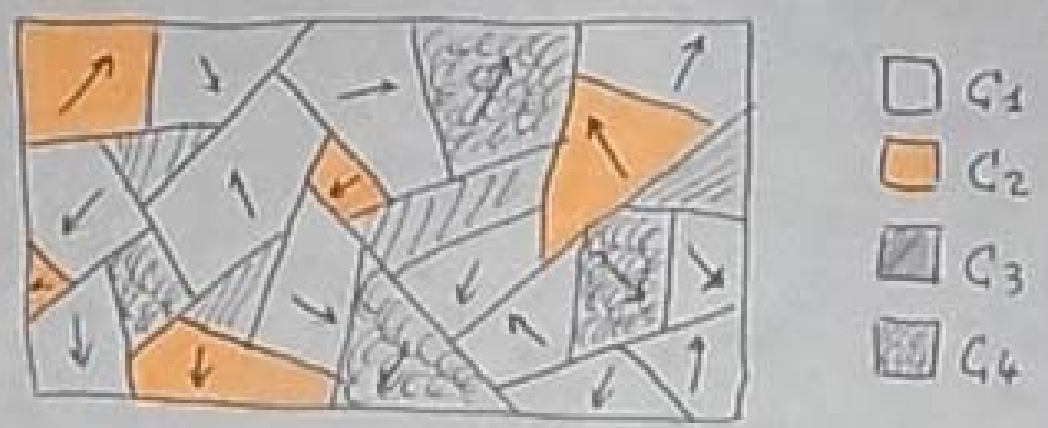
### 3. policristallo elastico

Consideriamo adesso  $N$  membri differenti

anisotropi  $G_1, \dots, G_N$  aventi frazioni

volumetriche  $\rho_1, \dots, \rho_N$  tali che  $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$ .

Essi siano mescolati al fine di  
formare un policrostallo multicomponente.



Sia  $G_{eff}$  lo stiffness effettivo del  
mezzo isotropo visto a scala macroscopica  
Sia  $A_i = [I - S(I - G_{eff}^{-1} C_i)]^{-1} \quad \forall i=1..N$

Aggiungiamo  $dc \text{ m}^3$  ad una miscela  
di  $1 \text{ m}^3$  di componenti  $i$ -esima; lo  
Stiffness finale sarà:

$$G_i' = F(G_{eff}, C_i, \frac{dc}{1+dc}) \approx F(G_{eff}, C_i, dc)$$



(69)

Adesso svolgo tale aggiunta + componenti.  
Di serie

$$G_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i'$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i F(G_{\text{eff}}, G_i, dx) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ F(G_{\text{eff}}, G_i, 0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} (G_{\text{eff}}, G_i, 0) dx \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i G_{\text{eff}} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} (G_{\text{eff}}, G_i, 0) dx$$

per cui, visto che  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$  si ha

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} (G_{\text{eff}}, G_i, 0) = 0$$

Ma, ricordando le relazioni di pag. 47:

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i [\langle G_i A_i \rangle - G_{\text{eff}} \langle A_i \rangle] = 0$$

cioè:

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i \langle G_i A_i \rangle = G_{\text{eff}} \sum_{i=1}^N \kappa_i \langle A_i \rangle$$

è, inserendo la definizione di  $A_i$ :

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i \langle G_i [I - S(I - C_{\text{eff}}^{-1} G_i)]^{-1} \rangle =$$

$\swarrow$   $V_{\text{eff}}$

$$= G_{\text{eff}} \sum_{i=1}^N \kappa_i \langle [I - S'(I - C_{\text{eff}}^{-1} G_i)]^{-1} \rangle$$

$\swarrow$   $V_{\text{eff}}$

che rappresenta l'equazione finale in  $G_{\text{eff}}$  cioè in  $K_{\text{eff}}$  e  $\mu_{\text{eff}}$ . Si osserva che  $S$  dipende da  $V_{\text{eff}}$  (Birson effettivo) e che l'operatore  $\langle \rangle$  è definito in pag. 44.

Si osservi anche che i tensori a sinistra e a destra dell'uguale, nelle precedenti, non sono isotropi perché mediati e quindi contengono entrambi due elementi indipendenti; ne risulta che il problema è ricondotto ad un sistema con due equazioni e due incognite ( $\mu_{eff}$  e  $\mu_{eff}$ ) pesantemente non lineare.

Per l'implementazione numerica è consigliabile l'uso della notazione di Voigt introdotta a pag. 16. L'equazione precedente continua ad essere valida con le seguenti convenzioni.

Ogni tensore è rappresentato da una matrice  $6 \times 6$  e le operazioni tra tensori diventano le ordinarie operazioni tra matrici.

I tensori  $C_i$  e gli scalari  $\rho_i$  sono dati numeri del problema.

Il tensore  $G_{eff}$  in rappresentata come segue:

$$G_{eff} = \begin{bmatrix} K_{eff} + \frac{4}{3}\mu_{eff} & K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & 0 & 0 & 0 \\ K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & K_{eff} + \frac{4}{3}\mu_{eff} & K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & 0 & 0 & 0 \\ K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & K_{eff} - \frac{2}{3}\mu_{eff} & K_{eff} + \frac{4}{3}\mu_{eff} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{eff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{eff} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{eff} \end{bmatrix}$$

Il tensore  $S$  di Eshelby per la sfera è:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

dove  $\nu = \nu_{eff} = \frac{3K_{eff} - 2\mu_{eff}}{2(3K_{eff} + \mu_{eff})}$

Infine il valore medio di un tensore  $\sigma$  calcola come segue:

Sia  $T = [t_{ij}]$  un tensore  $6 \times 6$  allora

$$\langle T \rangle = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & & \\ \beta & \beta & \alpha & & & \\ \beta & \beta & \beta & & & \\ \beta & \beta & \beta & & & \\ \beta & \beta & \beta & & & \\ & & & \alpha - \beta & & \\ & & & & \alpha - \beta & \\ & & & & & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

dove:

$$\alpha = \frac{1}{5} (t_{11} + t_{22} + t_{33}) + \frac{2}{15} (t_{44} + t_{55} + t_{66}) + \frac{1}{15} (t_{12} + t_{21} + t_{31} + t_{13} + t_{23} + t_{32})$$

$$\beta = \frac{1}{15} (t_{11} + t_{22} + t_{33}) - \frac{1}{15} (t_{44} + t_{55} + t_{66}) + \frac{2}{15} (t_{12} + t_{21} + t_{31} + t_{13} + t_{23} + t_{32})$$

tal'operazione corrisponde a quella descritta in fondo a pag. 44. La formula a pag. 50 è ora operativa.

Oltre allo stima  $C_{eff}$  data a pag. 50 storicamente sono state introdotte delle stime approssimate come segue.

VOIGT

$$C_{eff}^V = \sum_{i=1}^N \rho_i \langle C_i \rangle$$

REUSS

$$C_{eff}^R = \left[ \sum_{i=1}^N \rho_i \langle C_i^{-1} \rangle \right]^{-1}$$

VOIGT-REUSS - HILL

$$C_{eff}^{VRH} = \frac{1}{2} \left( C_{eff}^V + C_{eff}^R \right)$$

(dove  $\langle - \rangle$  è sempre la media come sopra)

Nel caso di un policristallo monocomponente  $G$  le relazioni si semplificano come segue:

$G_{eff} : \langle G [I - S(I - G_{eff}^{-1} G)]^{-1} \rangle = G_{eff} \langle [I - S(I - G^{-1} G)]^{-1} \rangle$

Voirgt:  $G_{eff}^V = \langle G \rangle$

Renn:  $G_{eff}^R = \langle G^{-1} \rangle^{-1}$

Hill:  $G_{eff}^{VEH} = \frac{1}{2} [\langle G \rangle + \langle G^{-1} \rangle^{-1}]$

Nella seguente tabella si riportano i risultati con l'implementazione MAPLE delle quattro formule per vari cristalli cubici:

$$G = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{12} & K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{11} \end{bmatrix}$$

ed i confronti con i valori sperimentali. I valori sono in  $10^{+12}$  dyn/cm<sup>2</sup> =  $10^{+11}$  N/m<sup>2</sup>

Materials	Spectrum counts						VolGT K / $\mu$	Reman K / $\mu$	HIFE K / $\mu$	Goff K / $\mu$	
	$R_{M1}$	$R_{M2}$	$R_{G4}$	K	$\mu$	K					
Cu	1,661	1,199	0,756	1,4	0,451	1,353	0,396	1,353	0,471	1,353	0,479
Ag	1,222	0,907	0,484	1,0	0,286	1,012	0,258	1,012	0,277	1,012	0,302
Al	1,329	1,638	0,415	2,2	0,276	1,735	0,234	1,735	0,272	1,735	0,278
MgO	2,971	0,953	1,561	16,41	1,292	1,625	1,280	1,625	1,310	1,625	1,311
CaF <sub>2</sub>	1,642	0,433	0,337	0,938	0,409	0,850	0,408	0,850	0,425	0,850	0,425
$\beta$ -ZnS	1,046	0,453	0,461	0,766	0,318	0,784	0,279	0,784	0,317	0,784	0,330
ZnSe	0,809	0,488	0,440	0,667	0,205	0,595	0,259	0,595	0,273	0,595	0,296
CaTe	0,535	0,308	0,199	0,425	0,139	0,423	0,128	0,423	0,140	0,423	0,142