

PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Ha numerose applicazioni pratiche:

- propagazione di un sisma
- " di vibrazioni meccaniche
- Diagnostica — medica (es. ECOGRAFIA)
- ingegneristica (es. BUELL FRATTURA)

Analizziamo prima di tutto e consideriamo una ONDA PIANA

in soluzione omogenea isotropa → E, ρ costanti

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{b} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Non consideriamo
le forze di volume
(gravitiche e non
hanno gradienti
costanti)

SCRIVIAMO IN COMPONENTI

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$\nabla^2 \vec{u}$ LAPLACIANO

∇ GRAD

ONDA PIANA: le 3 componenti dello spostamento possono
dipendere solo da 1 direzione (DIREZ. PROPAGAZIONE
DELL'ONDA) e dal tempo

es. 1°

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_3, t) \\ u_2 &= u_2(x_3, t) \\ u_3 &= u_3(x_3, t) \end{aligned}$$



HABITAT Legno

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

20.9

Cio' esprime tre uelle equazioni formano tutte le derivate parziali rispetto ad x_1 e x_2 . Si rimane dunque ben poco. Ognuno 3 equazioni molto + semplici

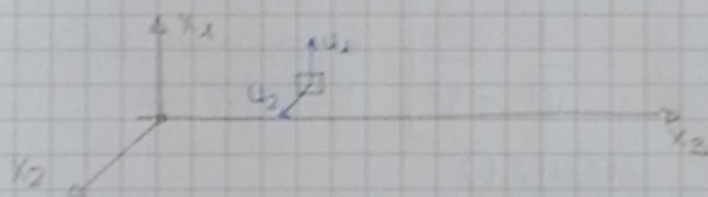
$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

Uomo tutte e 3 in modo simile tranne l'ultima che ha un diverso coefficiente.

$$\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \Rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

~~Uomo~~ Come mai la 3^a è diversa?



u_1, u_2 rispetto alla direzione di propagazione non trasversali,

u_1, u_2 : componenti TRASVERSALE

u_3 : COMPONENTE LONGITUDINALE

in trans lungo la direz. di propagazione.

ECO' CHE HA $\neq$ COEFF.

Per risolvere le equazioni del moto come

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} &= \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} &= \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

si definisce VELOCITA' TRASVERSALE

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

o VELOCITA' LONGITUDINALE

$$V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

Verifichiamo le unita' di misura $\rightarrow$

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{N/m^2}{kg/m^3}} = \sqrt{\frac{kg \cdot mm}{mm^2 \cdot s^2} \cdot \frac{mm^3}{kg}} = \frac{mm}{s} = \frac{m}{s}$$

forma fatta.

Per capire come ~~comportamento~~ vanno avanti le cose ci basta studiare l'equazione 3 equazioni, hanno andamento uguale a meno delle costanti

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{V_t^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{V_t^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} &= \frac{1}{V_t^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}$$

sono 3 equazioni di D'Alembert o
equazione dell'onda unidimensionale
1D. PROPRIO.

La prendiamo 1 per una

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \text{ e vediamo che}$$

$$u = u(z, t)$$

Facciamo un cambio di variabile $z = z - vt$ $\eta = z + vt$

$$u = u(z, \eta)$$

Calcoliamo le derivate parziali di ordine 1

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial z} \right]}_{L=1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \underbrace{\left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right]}_{L=1} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial z} \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial t} \right]}_{L=-v} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \underbrace{\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right]}_{L=+v} = -v \frac{\partial u}{\partial z} + v \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right]$$

vediamo che fare $\frac{\partial}{\partial z}$ corrisponde a $\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \eta}$
 $\frac{\partial}{\partial t} = -v \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial z} \right)$



HABITAT Legno_{SpA}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

Es. 11

Ora le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) =$$

$$= v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \right)$$

ora sostituiamo il nell'eq. di D'Alembert e le otteniamo nelle nuove variabili -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ci rimane
solo
questo.

Traviamo derivati a dire che l'equazione di D'Alembert rimane

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \eta} = 0 \quad \text{non serve come} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

quindi ho ottenuto che

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ può essere scritta}$$

$F(\eta)$ e non dipende da z .

COSTANTE ASPETTO A

3

$$F(\eta) \leadsto u(\eta, z) = \int F(\eta) d\eta + G(z)$$

no costante di integrazione
us. è costante
riferito ad η

$$= H(\eta) + G(z)$$

formando o z et avv

$$u(z, t) = \underbrace{H(z+vt)}_{\text{ONDA REGRESSIVA}} + \underbrace{G(z-vt)}_{\text{ONDA PROGRESSEDIVA}}$$

OGNI SOLA DELICA DI D'ALEMBERT HA QUESTA FORMA

Consideriamo prima la PROGRESSEDIVA

$G(z-vt)$ Consideriamo di fare una foto a $t=t_0$, così che

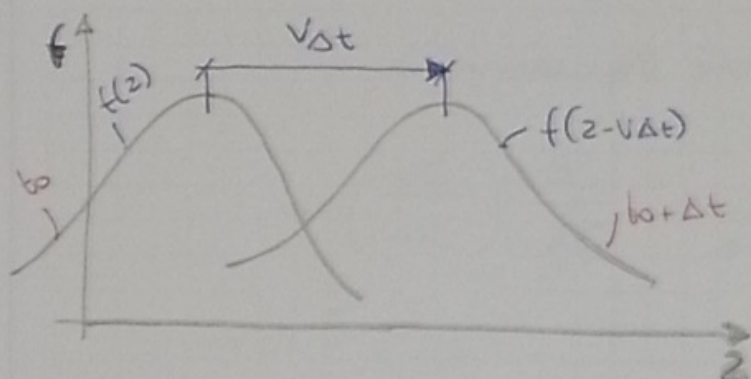
$$G(z-vt_0) = \boxed{f(z)} \quad t=t_0$$

Aspettiamo un certo Δt e facciamo nuova foto

$$G(z-v(t_0+\Delta t)) = G(z-vt_0-v\Delta t) =$$

$$= G((z-v\Delta t) - vt_0) = \boxed{f(z-v\Delta t)} \quad t=t_0+\Delta t$$

21.2



È come avere la
stessa onda ma
trascorso un
spazio di Δt .

ONDA → qualcosa che
dopo un certo tempo
riappare uguale

PROGRESSIVA → si sposta lungo il verso
positivo dell'asse z .

Prendiamo ora la REGRESSIVA

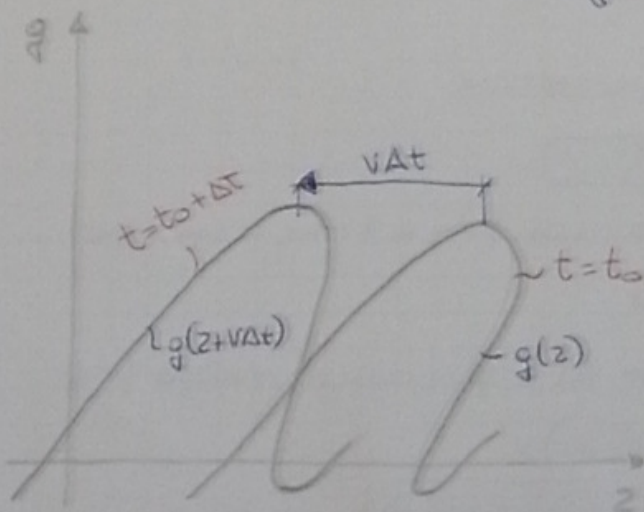
consideriamo ~~testa~~ stante mirale e puro foto

$$H(z + Vt_0) = \boxed{g(z)} \quad t = t_0$$

poi facciamo dopo un Δt $t = t_0 + \Delta t$

$$H(z + V(t_0 + \Delta t)) = H(z + Vt_0 + V\Delta t) =$$

$$= H((z + V\Delta t) + Vt_0) = \boxed{g(z + V\Delta t)}$$



Si sposta verso la parte
sx dell'asse z , dunque
REGRESSIVA. $V\Delta t$ è la
velocità di spostamento
dell'onda.



HABITAT Legno^{SpA}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edoio (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

213

Di più abbiamo visto che la soluzione generale di D'Alembert ~~è~~ è:

$$u(z, t) = H(z + vt) + G(z - vt)$$

NOTA 1

Quando si studiano le onde si considerano degli oscillamenti sinusoidali e pseudo-
in nome di onde MONOCROMATICHE, ovvero
contengono solo 1 frequenza.

$$\cos(\alpha(z - vt))$$

aviamo ω o freq. angolare,
di più $\alpha = \frac{\omega}{v}$ e di più

$$\cos\left[\frac{\omega}{v}(z - vt)\right] = \cos\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)$$

← scriviamo

Definisco anche un PERIODO (intervallo al tempo) [s]

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \rightarrow \text{FREQUENZA RISP. AL TEMPO [1/s]}$$

il periodo intervallo al tempo allo spazio
definito LUNGHEZZA D'ONDA [m]

$$\lambda_0 = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}$$

è definito anche la frequenza intervallo allo spazio,
detto anche NUMERO D'ONDE (inteso come modi
ovvero in 1m di spazio).

$$k_0 = \frac{\omega}{2\pi v} = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{f}{v} \text{ [1/m]}$$

NOTA 2

d'onda trasversale aveva velocità pari a $V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
 mentre quella longitudinale non.

$$V_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$$

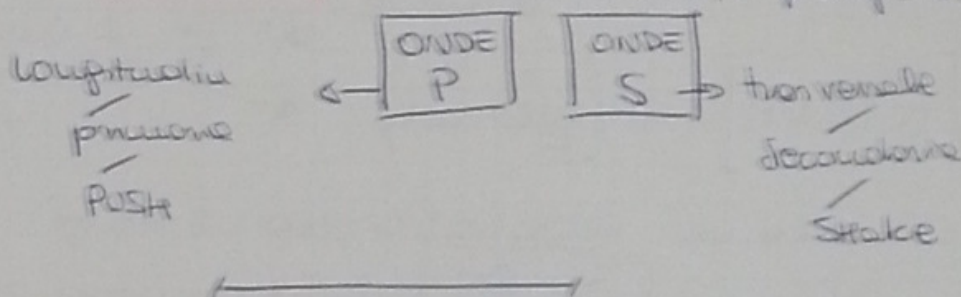
Da qui possiamo dire che, essendo

$$\lambda + 2\mu = \underbrace{\lambda + \frac{2}{3}\mu}_{k > 0} + \underbrace{\frac{4}{3}\mu}_{\frac{4}{3}\mu > \mu} > \mu$$

otteniamo che

$$\boxed{V_L > V_T} \quad \text{N.B.}$$

È una conclusione fondamentale
 in sismica, e si definisce



SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CON CONDIZ. INIZ. FISSATE

Consideriamo un
mezzo infinito su
 cui possiamo propagare
 onde plane

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

$$\left(\begin{aligned} u(z, 0) &= a(z) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) &= b(z) \end{aligned} \right) \rightarrow \text{NOTE}$$

$$u(z) = a(z)$$

$$v(z) = b(z) \rightarrow z$$

All'istante iniziale hanno
 spostam. longitudinali più
 elevate e ogni punto ha
 una certa velocità iniziale
 che noi consideriamo trasmi-
 te le condizioni iniziali



HABITAT Legno^{SpA}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

21.5

Voglio ricavare G ed H in funzione di $a(z)$ e $b(z)$

$$\rightarrow u(z,0) = G(z) + H(z) = a(z) \quad \text{1}^{\text{a}} \text{ COND. INIZIALE}$$

calcoliamo le derivate rispetto a t

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = -vG'(z-vt) + vH'(z+vt) \quad \text{calcoliamole in } t=0$$

$$\left(\frac{\partial u(z,0)}{\partial t} = -vG'(z) + vH'(z) = b(z) \right)$$

DEVO RISOLVERE IL SISTEMA DI QUESTE 2 EQUATIONI:

Integriamo la 2^a e mett. assieme con la 1^a

$$\begin{cases} G(z) + H(z) = a(z) \\ -G(z) + H(z) = \frac{1}{v} \int_{z_0}^z b(y) dy + C \end{cases} \quad \text{SOTTRAZIONE}$$

$$2H(z) = a(z) + \frac{1}{v} \int_{z_0}^z b(y) dy + C \quad \text{SOTTRAZIONE}$$

$$2G(z) = a(z) - \frac{1}{v} \int_{z_0}^z b(y) dy - C \quad \text{SOTTRAZIONE}$$

ora andiamo a sostituire H e G trovate nella soluzione generale

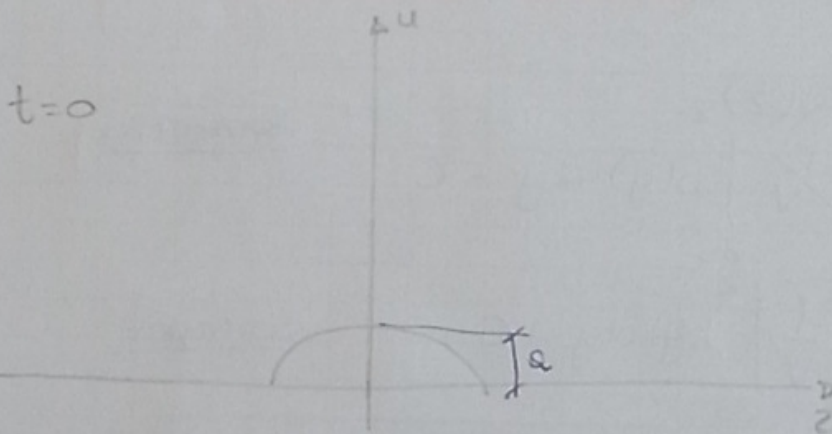
$$u(z,t) = \frac{1}{2} a(z-vt) - \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z-vt} b(y) dy + \frac{C}{2} + \frac{1}{2} a(z+vt) + \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z+vt} b(y) dy + \frac{C}{2} =$$

21.6

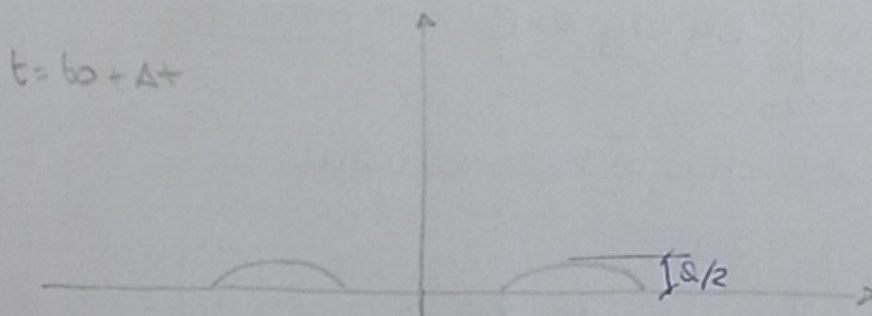
$$= \frac{a(z-vt) + a(z+vt)}{2} + \underbrace{\frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z_0} b(y) dy + \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z+vt}}_{\substack{\text{ho cambiato segno e} \\ \text{dunque inverto gli estremi}}}$$

$$= \boxed{\frac{a(z-vt) + a(z+vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z+vt} b(y) dy = u(z,t)}$$

CONOSCO IL VALORE DI TUTTE LE POSIZIONI IN
QUALUNQUE ISTANTE



la onda si sposta
a destra e le 2
metà vanno nei
2 sensi opposti





HABITAT Legno^{spa}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

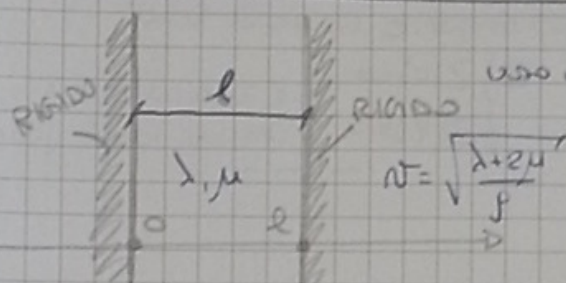
Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

21.7

ALTRO ESEMPIO

CONDIZIONE IDEALE DI TRAT ELASTICO FINITO



uso è metodo di
SEPARAZIONE DELLE
VARIABILI

Cond. Continuo (+ cond. iniz. di primo)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{SOSTAN. NON SI VINCONO}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

lesto di risolvere facendo la
supposizione che

$$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\partial^2 (Z(z) \cdot T(t))}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 (Z(z) \cdot T(t))}{\partial t^2}$$

le derivate direzionali
totali

$$T(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{1}{V^2} Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{1}{V^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

Z e T che

DIPENDE SOLO
DA Z

DIPENDE SOLO
DA T

DEBBO DONDE
ESSERE UGUALE A
1. COSANTE
N.B.

-8

21.8

Poi si può scrivere

$$\begin{cases} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \gamma Z(z) = 0 \\ \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \gamma V^2 T(t) = 0 \end{cases} \rightarrow Z(z) = A \cos(\sqrt{\gamma} z) + B \sin(\sqrt{\gamma} z)$$

devo imporre i vincoli di

$$\begin{cases} Z(0) = 0 \\ Z(l) = 0 \end{cases} \quad \text{e ricavo } A, B, \gamma \text{ che le soddisfino}$$

$$\bullet Z(0) = 0$$

$$\hookrightarrow A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\bullet Z(l) = 0$$

$$\hookrightarrow B \sin(\sqrt{\gamma} l) = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\gamma} = \frac{n\pi}{l}}$$

Dunque

$$\rightarrow \boxed{Z_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right)} \leftarrow$$

Ora imponiamo la 2^a impedenza $\sqrt{\gamma} = \frac{n\pi}{l}$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} V^2 T(t) = 0$$

analogamente a prima

$$\rightarrow \boxed{T_n(t) = S_n \sin\left(\frac{n\pi V}{l} t\right) + C_n \cos\left(\frac{n\pi V}{l} t\right)} \leftarrow$$

Avremo posto che $u = Z \cdot T$, dunque ho trovato le soluzioni, ed essendo composte da funzioni lineari posso scrivere





HABITAT Legno_{SpA}

Grandi strutture in legno lamellare

Sede sociale e amministrativa: 25048 Edolo (Brescia) Italia - Via G. Sora, 22

Telefono: 0364.773511 - Telefax 0364.72449

Internet Web Site: //www.habitatlegno.it - E-mail: habitat@habitatlegno.it

Stabilimento: 25040 Braone (Brescia)

21.9

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \left[S_n \sin\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) + C_n \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) \right]$$

{ la somma delle soluzioni si può rendere più semplice,
rendendo funzioni lineari }

chiamiamo $B_n S_n = \tilde{S}_n$ $B_n C_n = \tilde{C}_n$

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \left[\tilde{S}_n \sin\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) + \tilde{C}_n \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) \right]$$

SOLUT. GENERALE

$\tilde{S}_n$ e $\tilde{C}_n$ rivelano essere ~~percepiti~~ i coeff.
degli sviluppi in serie di Fourier di
 $a(z)$ e $b(z)$

da:

a:

ONDE LONGITUDINALI

velocità

pressione

$$u_3 = u_3(x_3, t)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

(D'Alembert)

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Considerando solo la
variazione spostamento u_3 , analizziamo la variazione presso valgono le deformazioni

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ è l'unica } \neq 0 \text{ sarà } \left[\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right]$$

Per variazioni p.e. spk, considerando mezzo lineare isotropo

$$T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} T_{33} = (2\mu + \lambda) \epsilon_{33} \rightarrow \text{pressione, è lungo l'asse di propagazione} \\ T_{11} = T_{22} = \lambda \epsilon_{33} \end{cases}$$

$$\text{Pressione} \Rightarrow P = -T_{33} = -(2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\text{Velocità} \Rightarrow V = \frac{\partial u_3}{\partial t} \quad \text{velocità istantanea delle particelle}$$

Analizziamo a vedere quali equazioni devono essere soddisfatte da P e V .Calcoliamo le $\frac{d}{dt}$ (~~derivata~~) di P

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(2\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -(2\mu + \lambda) \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial x_3}$$

(D'Alembert)

misura
derivata della
velocità

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \rightarrow \text{SOSTITUENDO D'Alembert}$$

$$= -(2\mu + \lambda) \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x_3}$$

ma

$$V_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

Ho quindi 2 equazioni in 2 incognite (P, V), derivando la propag. di onde del tipo campo elettrico, e campo magnetico, bene dritture. Vale anche nel caso di termone e corrente.

PRESSIONE - - - VELOCITA'
CAMPO EL - - - CAMPO MAGN
TENSIONE EL - - - CORRENTE EL.

Andiamo a vedere i triplici andamenti di P, V in dipendenza l'una dall'altra

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = - \int \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial V}{\partial t} = - \int \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial V}{\partial x_3} \right] = \left[\frac{\rho}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} \right]$$

La velocità, facendo la stessa operazione otteniamo la stessa cosa (VERIFICA DATA)

$$\frac{\rho}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}$$

ONDE TRASVERSALI

Hanno 2 componenti u_1 e u_2 funzione di x_3 e t . Consideriamo solo $u_1 \neq 0$, $u_1 \neq 0$, $u_1 = u_1(x_3, t)$

Segue l'equaz. di D'Alembert con V trasversale

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \frac{1}{V_T} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

DEFORMATIONI.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad \text{univ. } \neq 0$$

$$T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$T_{13} = T_{31} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

Introduciamo Pressione e Velocità

$$\int P = -T_{13} = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad \text{la chiamo P per semplicità}$$

$$V = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{vel. trasversale}$$

da:

a:

Vediamo anche stavolta per le equazioni dovono regnare P e V in pari con.

Come prima

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x_3} = \boxed{-\mu \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial t}}$$

$\rho V = \frac{\partial u_1}{\partial t}$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \quad \text{ma da D'Alembert} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \text{ dunque}$$

$$= -\mu \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\mu \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \boxed{-\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x_3}}$$

Anche qui vediamo come sono le due indipendenti dell'elica, e verifichiamo che regna d'Alembert (come prima).

Prendiamo V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\mu \right) \frac{\partial V}{\partial x_3} =$$

$$= \left\{ \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right\} \quad \text{idem per } P, \quad \text{ENTRARE D'Alembert}$$

~~VERIFICA DA FARE~~

Possiamo scrivere i due così:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x_3} \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases} \quad \gamma = \begin{cases} 2\mu + \lambda & \text{longitudinale} \\ \mu & \text{trasversali} \end{cases}$$

Anche a trovare le soluzioni nel caso di onde monodimensionali, o a frequenze finite con $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

usiamo il metodo degli esponenziali immaginari (come ultima lezione) e scriviamo P e V come

$$P(x_3, t) = \operatorname{Re} \left\{ p(x_3) e^{i\omega t} \right\}; \quad V(x_3, t) = \operatorname{Re} \left\{ v(x_3) e^{i\omega t} \right\}$$

Con facendo le 2 equazioni diventiamo

SOSTITUISCO PER $\frac{d\sigma}{dx_3}$

$$\begin{cases} i\omega p = -\gamma \frac{d\sigma}{dx_3} \\ \frac{dp}{dx_3} = -i\omega \tilde{\rho} p \end{cases} \quad ? \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \{ p(x_3) e^{i\omega t} \} = -\gamma \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{Re} \{ \sigma(x_3) e^{i\omega t} \} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{Re} \{ p(x_3) e^{i\omega t} \} = -\tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \{ \sigma(x_3) e^{i\omega t} \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \{ i\omega p e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \left\{ -\gamma \frac{d\sigma}{dx_3} e^{i\omega t} \right\} \\ \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\rho} \frac{dp}{dx_3} e^{i\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \{ -i\omega \sigma e^{i\omega t} \} \end{cases} = \begin{cases} i\omega p = -\gamma \frac{d\sigma}{dx_3} \\ \frac{dp}{dx_3} = -i\omega \tilde{\rho} p \end{cases} \quad \text{C.V.D.}$$

~~La soluzione~~ Andiamo dunque a trovare la soluzione

partendo dalla 2^a equazione

$$\frac{dp}{dx_3} = -i\omega \tilde{\rho} p \quad \frac{d\sigma}{dx_3} = -\frac{i\omega p}{\gamma}, \text{ dunque}$$

$$= -i\omega \tilde{\rho} \left(-\frac{1}{\gamma} \right) i\omega p \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 p}{dx_3^2} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\gamma} p = 0} \quad \text{EQUAZIONE DEI MOTI ARMONICI}$$

la soluzione sarà

$$p(x_3) = A e^{-i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3} + B e^{i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3}$$

Calcoliamo ora la velocità, dalla 1^a (nota appena trovata)

$$\tilde{v} = -\frac{1}{i\omega \tilde{\rho}} \frac{dp}{dx_3}$$

QUANDO SONO MONODIMENSIONALI, NOTA TRA v E p , CONVIENE ANCHE CALCOLARE

$$= -\frac{1}{i\omega \tilde{\rho}} \left[A \left(-i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} \right) e^{-i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3} + B i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} e^{i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3} \right] =$$

$$= \boxed{\frac{A}{\sqrt{\gamma \tilde{\rho}}} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3} + \frac{B}{\sqrt{\gamma \tilde{\rho}}} e^{i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}} x_3} = \tilde{v}(x_3)}$$

IMPEDENZA AUSTICA DEL TUBO

da:

a:

Abbiamo quindi ricavato

$$\left\{ \begin{aligned} p(x_3) &= A e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3} + B e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3} \\ v(x_3) &= \frac{A}{Z} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3} - \frac{B}{Z} e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3} \end{aligned} \right\} \quad \text{dove } Z = \sqrt{\frac{\rho}{g}} \quad \text{IMPED. ACOUSTICA}$$

i termini con
esponente
negativo sono
onde progressive

i termini con
esponente
positivo sono
onde regressive

IMPED. ACOUSTICA

$$Z = \sqrt{\frac{\rho}{g}} = \sqrt{\frac{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}}} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right] = [Z]$$

1 Rayl

ha' dimensioni
anche per onde

$$\text{velocita'} \rightarrow \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad \text{cio}$$

Si dice che succede ciò quando ho
un'onda che va a sbattere contro un certo mezzo, e l'onda viene
trasmessa e l'onda viene riflessa.

Vediamo come sono fatte realmente le onde progressive.

$$\begin{aligned} p(x_3, t) &= \text{Re} \left\{ p(x_3) e^{i\omega t} \right\} = (\text{solo PROGRESSIVO}) \text{Re} \left\{ A e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3} e^{i\omega t} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ (A_r + i A_{im}) e^{i\omega(t - \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ (A_r + i A_{im}) \left[\cos(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3) + i \sin(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3) \right] \right\} = \\ &= A_r \cos(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3) - A_{im} \sin(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\rho}{g}} x_3) \end{aligned}$$

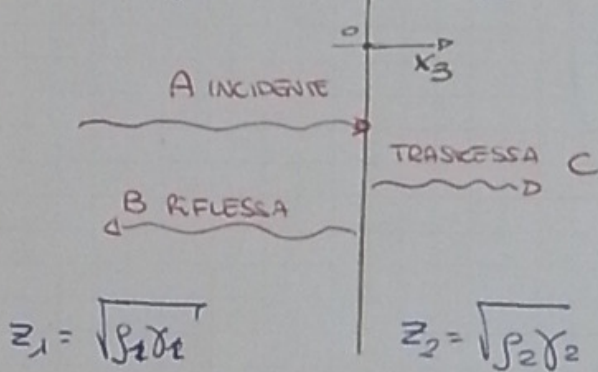
LA INDICANO ONDE PROGRESSIVE,
DUNQUE OK.

BASTA GUARDARE IL SEGNO DELL'ESPOLENTIALE PER CAPIRE SE

PROGRESSIVA (-)
REGRESSIVA (+)

Andiamo a vedere come incidono onde su un'interfaccia tra 2 mezzi (ondeg. lineari e isotropi) 1e2

① $\lambda_1, \mu_1, \gamma_1$ ② $\lambda_2, \mu_2, \gamma_2$



A la cassa, densità e velocità
C e B. Densità e velocità
definiscono

$$+R = \frac{B}{A} \quad \text{COEFF. RIFLESSIONE}$$

$$+T = \frac{C}{A} \quad \text{COEFF. TRASMISSIONE}$$

Supponiamo che nel mezzo 1 non abbiamo onde stazionarie, e non
ho onde regressive (dunque) nel mezzo 2 [DETERMINO]

MEZZO 1

$$p_1(x_3) = A e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1}} x_3} + B e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1}} x_3}$$

$$N_1(x_3) = \frac{A}{Z_1} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1}} x_3} - \frac{B}{Z_1} e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1}} x_3}$$

MEZZO 2

$$p_2(x_3) = C e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\gamma_2}} x_3}$$

$$N_2(x_3) = \frac{C}{Z_2} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\gamma_2}} x_3}$$

($x_3 \rightarrow 0$)
All'interfaccia devo
avere densità e
continui, dunque velocità
continue; inoltre ho
p continua avendo x fello
incolloquio fra i mezzi

CONTINUA

$$\begin{cases} A + B = C & p(0^+) = p(0^-) \\ \frac{A}{Z_1} - \frac{B}{Z_1} = \frac{C}{Z_2} & N(0^+) = N(0^-) \end{cases}$$

CONTINUA

$$\begin{cases} 1 + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \\ \frac{1}{Z_1} - \frac{B/A}{Z_1} = \frac{C/A}{Z_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{1}{Z_1} (1 - R) = \frac{1}{Z_2} T \end{cases}$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} \frac{1+R}{1-R} \sim \dots$$

da:

a:

$$\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) = R \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)$$

$$\rightarrow R = \frac{\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = R$$

COEFF
RIFLESSIONE

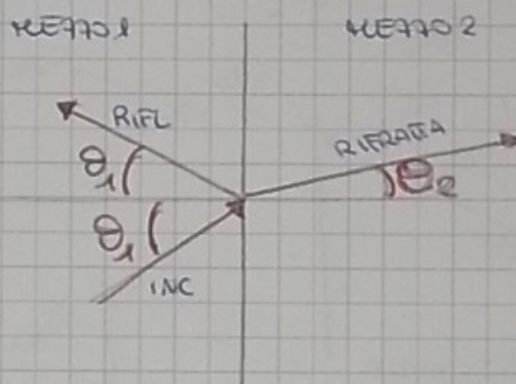
$$T = 1 + R = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_2 + Z_1 + Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = T$$

COEFF.
TRASMISSIONE

Consideriamo il caso in cui l'onda incide normalmente sull'interfaccia.

Consideriamo delle
onde elettromagnetiche,
che sono solo PIANE TRASVERSALI.
Su questo caso se è incidente
con angolo θ_1 , l'onda
riflessa viene riflessa con
lo stesso angolo θ_1 (ANG. INCIDENTE
= ANG. RIFLESSO), nel
mezzo 2 l'onda
RIFRATTA angolata di θ_2
che ricavo con la legge
di SNEU



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

c -> vel. luce vuoto

Nei solidi ho onde elastiche

- TRASV $\rightarrow n_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
- LONGITUD $\rightarrow n_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$

Nei liquidi ρ $\rightarrow$ mezzomateriali come un mezzo elastico avente $\mu=0$,
infinito non trasmettono sforzi di taglio, $\rightarrow$ liquidi
conseguenza di ciò è il fatto che NEI LIQUIDI NON
ESISTONO ONDE TRASVERSALI, anche longitudinali
hanno $n_L = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$

es. ACQUA

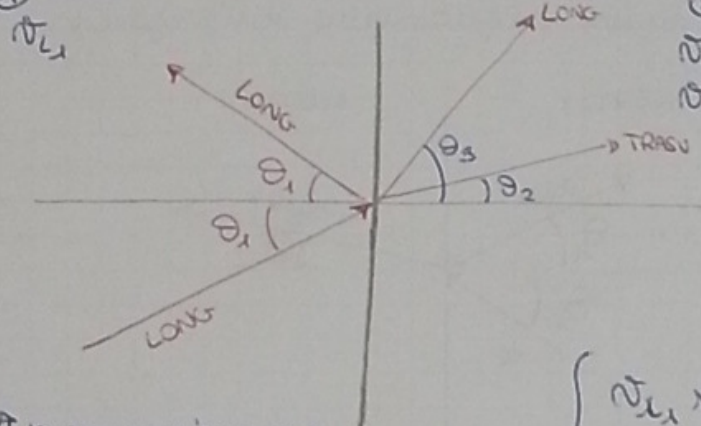
$$\left. \begin{array}{l} \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 2.26 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \end{array} \right\} \rightarrow n_L = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} = 1.5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$Z_L = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Rayl}$$

23.2

Consideriamo un fluido che lambisce un solido

① Fluido



↑ HO SOLO LONGITUDINALE
AVENDO LIQUIDO

Solido

②

$\tilde{v}_{L2}$

$\tilde{v}_{T2}$

Nel solido possono
propagarsi 2
onde rifratte

1 LONGITUDINALE

1 TRASVERSALE

Scriviamo le leggi di Snell
nei 2 mezzi

$$\begin{cases} \tilde{v}_{L1} \sin \theta_2 = \tilde{v}_{T2} \sin \theta_1 \\ \tilde{v}_{L1} \sin \theta_3 = \tilde{v}_{L2} \sin \theta_1 \end{cases}$$

Un'onda longitudinale
genera onde rifratte

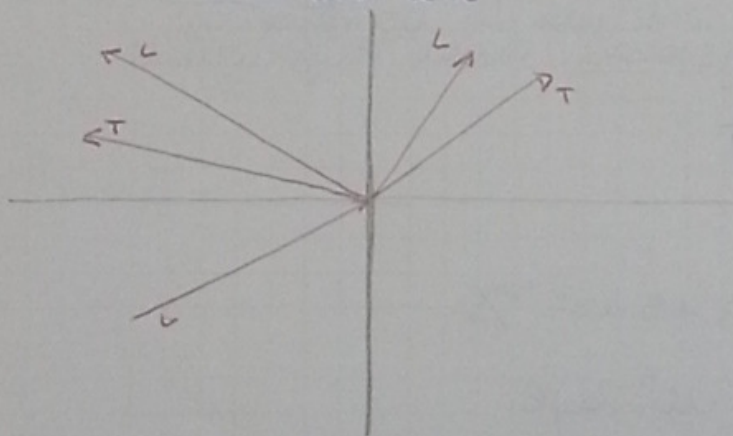
nel solido, 1 lungo e 1

a partire da

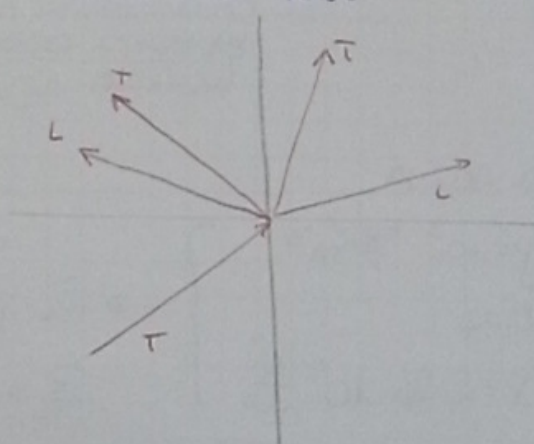
trasversale. La generazione di un'onda longitudinale da
un'onda trasversale è detta CONVERSIONE MODALE

Se ho invece solido-solido?

INCIDE ONDA LONG



INCIDE ONDA TRASO



Generando i soni si generano 2 onde riflette e 2 onde rifratte.

da:

a:

Vediamo ora succede re torzione in onde ELASTICA in un mezzo VISCOELASTICO

ONDE IN MEZZI VISCOELASTICI

Quando ho una frequenza abb. elevata le onde vanno incontro a degli fenomeni di attrito. In questo caso come cambia la equazione costitutiva?

Finora abbiamo detto che $T = 2\mu \epsilon + \lambda \text{tr} \epsilon I$;

ricordando che $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ avremo

$$= 2\mu \epsilon + (k - \frac{2}{3}\mu) \text{tr} \epsilon I = \boxed{2\mu \left(\epsilon - \frac{1}{3} \text{tr} \epsilon I \right) + k \text{tr} \epsilon I = T}$$

SHEAR MODULUS μ
BULK MODULUS k

Per considerare l'attrito, anche' a descrivere in termini proporzionale alle velocità, ovvero alle derivate delle ϵ ; otterremo

$$T = 2\mu \left(\epsilon - \frac{1}{3} \text{tr} \epsilon I \right) + k \text{tr} \epsilon I + \left[2\eta \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{1}{3} \text{tr} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} I \right) + \right. \\ \left. + \zeta \text{tr} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} I \right]$$

SHEAR VISCOSITY (1° VISCOSITA')
Bulk viscosity (2° VISCOSITA')

Rettiamoci in regime sinusoidale; otterremo dunque

$$T = 2\mu \left(\epsilon - \frac{1}{3} \text{tr} \epsilon I \right) + k \text{tr} \epsilon I + 2\eta \left(i\omega \epsilon - \frac{1}{3} i\omega \text{tr} \epsilon I \right) + \zeta i\omega \text{tr} \epsilon I$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$

~~esattamente~~ avremo, raccogliendo i termini ϵ e $\text{tr} \epsilon I$

$$T_{ij} = 2(\mu + i\omega\eta) \epsilon + \text{tr} \epsilon I \left(-\frac{2}{3}\mu + k - \frac{2}{3} i\omega\eta + i\omega\zeta \right) \\ = 2(\mu + i\omega\eta) \epsilon + \text{tr} \epsilon I \left(\lambda - \frac{2}{3} i\omega\eta + i\omega\zeta \right)$$

Ynsueti ti ottenuti finora senza viscosità e/o con
valori, forse un esempio di viscosità, in quanto
le μ e λ che avevamo prima diventano

$$\mu \rightarrow \mu + i\omega\eta$$

$$\lambda \rightarrow \lambda + i\omega\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)$$

Avevamo ricavato che

$$\textcircled{P} = A e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho}{\gamma}}x_3} = A e^{-i\beta x_3}$$

$$\textcircled{N} = \frac{A}{2} e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho}{\gamma}}x_3} = \frac{A}{2} e^{-i\beta x_3}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \cdot \omega \quad \text{COSTANTE DI PROPAGAZIONE}$$

$$\gamma = \begin{cases} 2\mu + \lambda & \text{LONG} \\ \mu & \text{TRASV} \end{cases}$$

È tutto sempre valido, ma γ e β diventano
numeri complessi. In particolare β complesso
cambia la forma dell'onda, in quanto cambia il termine esponenziale
COME CAMBIA?

$$\beta_{\text{LONG}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2(\mu + i\omega\eta) + \lambda + i\omega(\zeta - \frac{2}{3}\eta)}}$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda + i\omega(2\eta - \frac{2}{3}\eta + \zeta)}}$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda + i\omega(\frac{4}{3}\eta + \zeta)}} = \beta_{\text{LONG}} \quad \beta_L$$

$$\beta_{\text{TRASV}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu + i\omega\eta}} \quad \beta_T$$

Consideriamo che la radice sia un n° complesso
del tipo $\beta = \beta_{\text{RE}} - i\beta_{\text{IM}}$

$$\beta_{L,T} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{A + iB}} \quad \text{dove } A \text{ e } B \text{ sono 2 grandezze positive}$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\rho(A - iB)}{(A + iB)(A - iB)}} = \omega \sqrt{\frac{\rho(A - iB)}{A^2 + B^2}} = \sqrt{C + iD} \cdot \omega$$

dove sia C che D sono positivi

Calcoliamo lettere genericamente due dimensioni

$$\sqrt{a - ib} = \beta_R - i\beta_I \quad ; \quad a - ib = (\beta_R - i\beta_I)^2 =$$

$$= \beta_R^2 - \beta_I^2 - 2i\beta_R\beta_I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \beta_R^2 - \beta_I^2 \\ b = 2\beta_R\beta_I \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{risolviamo} \\ \text{le incognite} \\ \text{e ricaviamo} \\ \beta_R \text{ e } \beta_I \end{array}$$

$$\begin{cases} \beta_R = \frac{b}{2\beta_I} \\ a = \frac{b^2}{4\beta_I^2} - \beta_I^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4\beta_I^2 a &= b^2 - 4\beta_I^4 \\ \text{da } 4\beta_I^4 + 4\beta_I^2 a - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \beta_I^2 = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 44(-b^2)}}{2} =$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{l'unica accettabile sarà } \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

da cui

$$\beta_I = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Sostituiamo nella 1^a
equaz. del sistema
e ricaviamo

$$\beta_R = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}} =$$

$$= \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{a^2 + b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} = \beta_R$$

23.4

da:

a:

Ho due termini in cui la frequenza è fortemente alta che ha + effetti vicini che lontani. cosa accade in questo caso?

METODO FORTEMENTE VISCOZO

ONDA LONGITUD.

Un mezzo è fortemente viscoso x cui onde longitudinali quando $\left[\omega \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \gg 2\mu + \lambda \right]$

Si possono ipotizzare ancora

$$\beta_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{i\omega \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right)}}$$

e dunque mi viene a calcolare le radici della sola parte immag.

ricordando che $\frac{1}{i} = -i$ $\Rightarrow \beta_L = \sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega \rho}{\frac{4}{3} \eta + \zeta}}$

Calcoliamo con gli ESPONENZIALI

$$-i = e^{-i\pi/2} \Rightarrow \sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2} + 2k\pi}} = e^{-i\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad \begin{matrix} k=0 \\ k=1 \end{matrix}$$

$$k=0 \quad e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(45^\circ) - i\sin(45^\circ) = 0.707$$

$$k=1 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(135^\circ) - i\sin(135^\circ)$$

da cui

$$\beta_L = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{\frac{\omega \rho}{\frac{4}{3} \eta + \zeta}}$$

da cui posso calcolare

la velocità dell'onda

LA VELOCITÀ

DIPENDE
DALLA
FREQUENZA

$$v = \frac{\omega}{\beta_L} = \frac{\omega}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega \rho}{\frac{4}{3} \eta + \zeta}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right)}{\rho}} = v$$

ora, la profondità di penetrazione d'onda

$$d = \frac{1}{\beta_z} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\eta + \gamma}{\omega\rho}} = d$$

ANCHE d
DIPENDE DALLA
FREQUENZA

ONDE TRASVERSAI

Numero fortemente viscoso se $\omega\eta \gg \mu$

$$\beta_T = \omega \sqrt{\frac{\rho}{i\omega\eta}} = \sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}} = \beta_T$$

Velocità dell'onda

$$v = \frac{\omega}{\beta_T} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\eta}{\rho}} \right] = d$$

Prof. di penetrazione

$$d = \frac{1}{\beta_T} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta}{\omega\rho}} \right] = d$$

UNITÀ DI MISURA DELLE VISCOSITÀ

$$T = (\lambda, \mu) E + (\gamma, \eta) \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \frac{N}{m^2} = \frac{\text{viscosità}}{\text{tempo}} \leadsto \frac{N}{m^2} \cdot s \Rightarrow [Pa \cdot s] \text{ POISEUILLE}$$

onde longitudinali nei gas

Consideriamo un gas (tipo aria) in cui si propaga un'onda elastica (acustica). Per assenza di sforzi di taglio si ha $\mu = 0$. Il modulo λ si calcola in approssimazione adiabatica. Visto che la velocità delle particelle è molto veloce allora si suppone che non ci sia il tempo di trasmettere il calore e quindi durante la propagazione si ha $P \cdot V^{\frac{C_p}{C_v}} = \text{costante}$ dove

P = pressione, V = volume e C_p e C_v

sono i calori specifici a pressione e volume costanti rispettivamente.

Da $T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$ si ha

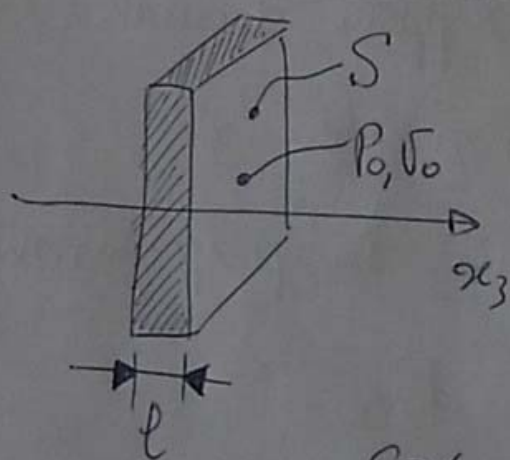
$T_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$ siccome $\mu = 0$. Poi,

per l'onda longitudinale si ha solo

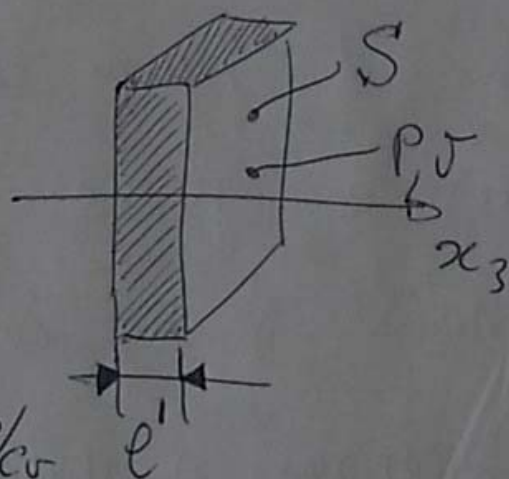
$u_3 \neq 0$ e quindi $\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$. Ne

segue $\boxed{T_{33} = \lambda \epsilon_{33}}$. Consideriamo
un parallelepipedo di materiale.

Configurazione di riferimento



Configurazione deformata



$$P_0 \sqrt{J_0} \quad c_P/c_V = P \sqrt{J} \quad c_P/c_V$$

Si identifica:

$$\begin{cases} T_{33} = P - P_0 \\ \epsilon_{33} = \frac{e' - e}{e} \end{cases}$$

ma si ha $v_0 = S \cdot l$ e $v = S \cdot l'$ 24-3

e quindi
$$\varepsilon_{33} = \frac{l' - l}{l} = \frac{S l' - S l}{S l} = \frac{v - v_0}{v_0}$$

Allora si può calcolare λ come segue:

$$\lambda = \frac{T_{33}}{\varepsilon_{33}} = \frac{P - P_0}{v - v_0} v_0$$

Da $P_0 v_0^{c_p/c_v} = P v^{c_p/c_v}$ si ha:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{v}{v_0} \right)^{c_p/c_v} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = \left(\frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p} \Rightarrow$$

$$v = v_0 \left(\frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p} \quad \text{ed allora:}$$

$$\lambda = \frac{P - P_0}{v_0 \left(\frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p} - v_0} \cdot v_0 = P_0 \frac{\frac{P}{P_0} - 1}{\left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{c_v}{c_p}} - 1}$$

Se P e ρ pouco diverso da P_0

24-4

$$\lambda = P_0 \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\frac{P}{P_0} - 1}{\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}} - 1} =$$

$$= P_0 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^{\frac{C_p}{C_v}} - 1} = P_0 \frac{C_p}{C_v}$$

ent

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{\lambda} &= \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \\ \lambda &= \sqrt{\rho \lambda} \end{aligned}}$$

e quindi

$$\boxed{\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho} \frac{C_p}{C_v}}}$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\rho P_0 \frac{C_p}{C_v}}}$$

$C_p/C_v = 1.4$ per gas biatomici

$$P_0 = 1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 1.5 \text{ kg/m}^3$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{\lambda} &\approx 330 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \\ \lambda &= 500 \text{ Rayl} \end{aligned}}$$

da

Onde nei mezzi anisotropi

24-5

Consideriamo le equazioni dell'elasticità in un mezzo anisotropo

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Si suppone $b_i = 0$ e quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} E_{kl}) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$C_{ijkl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$C_{ijkl} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Per la simmetria $C_{ijkl} = C_{jikh}$

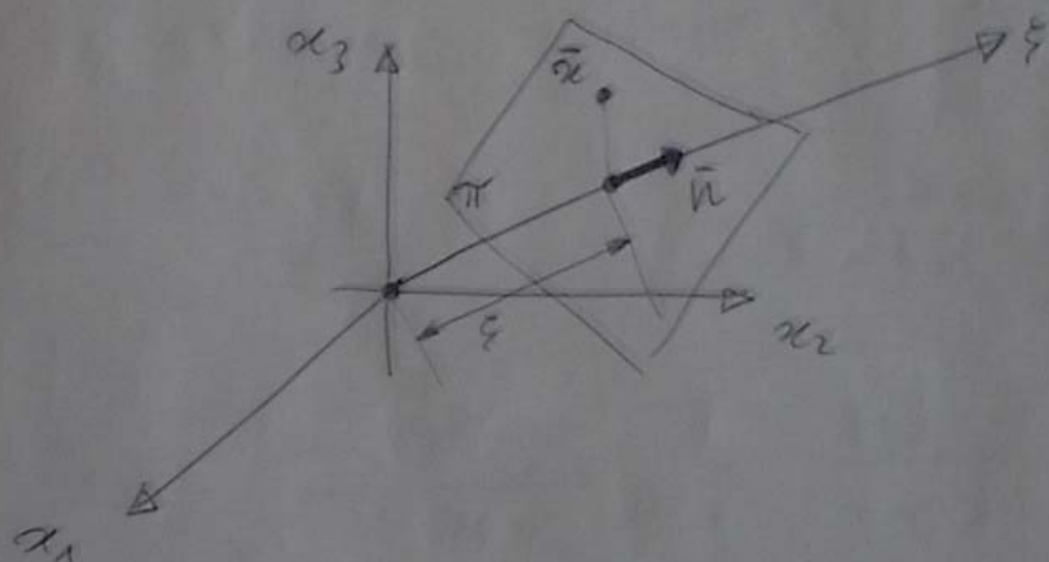
si ha

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Eq. delle onde in mezzo
anisotropo.

Onda piana nella direzione generica ξ

$$u_i = u_{i0} e^{i\omega(t - \frac{\xi}{v})}$$



In figura si vede il piano $\pi \perp \xi$
ed il vettore $\bar{n}$. Per un punto generico
 $\bar{x} \in \pi$ si ha $(\bar{x} - \bar{n}\xi) \cdot \bar{n} = 0$

cioè $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{n} \quad \xi \quad e$

quindi $\vec{x} \cdot \vec{n} = \xi$ - Ne segue:

$$\boxed{\mu_i = \mu_{i0} e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}}$$

onda piana in direzione $\vec{n}$.

Devo sostituire nell'eq. delle onde:

$$\mu_k = \mu_{k0} e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} = \mu_{k0} \frac{-i\omega}{v} n_j e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial x_j \partial x_h} = \mu_{k0} \frac{-i\omega}{v} n_j \frac{-i\omega}{v} n_h e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial t} = \mu_{k0} i\omega e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial t^2} = \mu_{k0} (i\omega)^2 e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v} \right)}$$

mettendo insieme le cose si ha: 24-8

$$C_{ijkl} \mu_{ko} \frac{(i\omega)^2}{\sigma^2} m_j m_l = \rho \mu_{io} (i\omega)^2$$

$$[C_{ijkl} m_j m_l - \rho \sigma^2 \delta_{ik}] \mu_{ko} = 0$$

Esiste soluzione al sistema omogeneo
soltanto se il det è zero:

$$\boxed{\det [C_{ijkl} m_j m_l - \rho \sigma^2 \delta_{ik}] = 0}$$

Equazione di Christoffel $\nearrow$

Il tensore $\Lambda_{ik} = C_{ijkl} m_j m_l$ è
chiamato tensore acustico:

$$\boxed{\det [\Lambda_{ik} - \rho \sigma^2 \delta_{ij}] = 0}$$