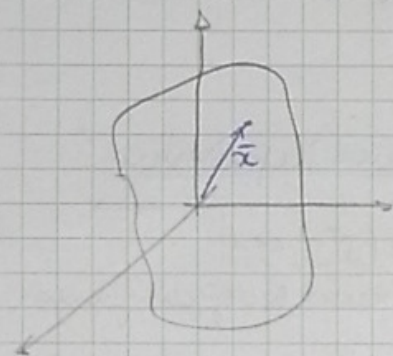


FISICA DEI MATERIALI DISPOSITIVI

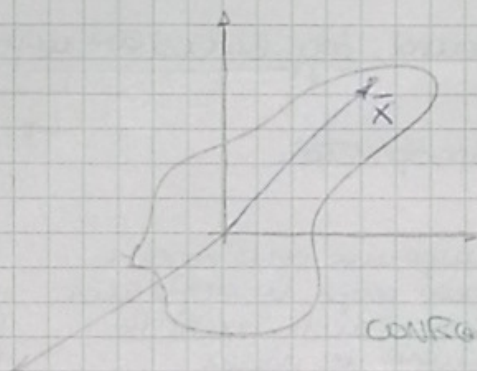
TEORIA DELL'ELASTICITÀ

Tensione delle deformazioni → ci dice quanto è deformato il mezzo

Consideriamo un corpo di forme qualsiasi dopo averlo deformato con un punto in un dato, in una data punto deformato



CONFIG. RIFERITA



CONFIG. DEFORMATA (ATTUALE)

Homomorfismo
vettoriale

$$\bar{x} = \bar{X}(\bar{x})$$

Scrittura in coordinate generalizzate

$$\bar{x} = \bar{x} + \bar{u}(\bar{x})$$

↑
SPOSTAMENTO

dove $\bar{u}(\bar{x})$ in
componenti
sono

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Ma a disposizione 9 derivate parziali

$$J_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \text{MATR. JACOBIANA}$$

Separiamo parte simmetrica
e antisimmetrica

$$J_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned} E_{ik} &= E_{ki} \\ \Omega_{ik} &= -\Omega_{ki} \end{aligned}$$

↑
SIMMETRICA

↑
ANTISIMMETRICA

E_{ik} tensione delle piastre
deformazioni

Ω_{ik} tensione delle rotte
locali

$$J = E + \Omega \quad \text{COME
MATRICI}$$

Es. le 3 proprietà di un materiale:

Ho 2 tipi di teoria $\begin{cases} \rightarrow \text{DEFORMAT. FINITE (grandi deformazioni)} \\ \rightarrow \text{u INTENSIVITÄT (piccole)} \end{cases} \leftarrow \text{CONSIDERO QST, sono piccoli in rapp al sistema}$

Ho varie Equazioni COSTITUIVE (nella $\sigma - \epsilon$) $\begin{cases} \text{LINEARE (Hook)} \\ \text{NON LINEARE} \end{cases} \leftarrow \text{CONSIDERO QST}$

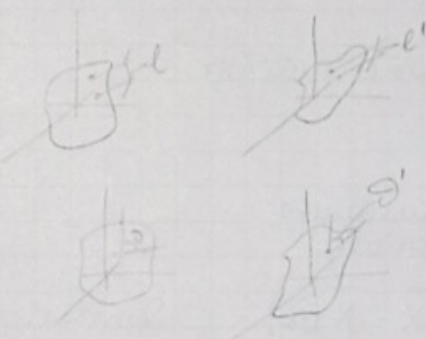
Provare tt le 4 combinazioni, una cond. leggi lineari e deformazioni infinitesime

E_{ik} ha, sotto pti ipotesi, 3 proprietà:

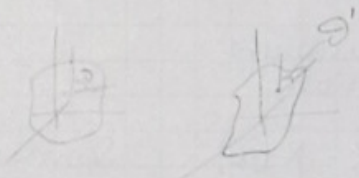
$$\rightarrow \text{tr}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \ll 1$$

trovare le def di 2° grado

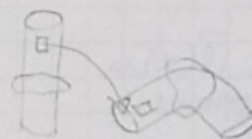
① Se ho 2 punti vicini lungo una certa linea e distanti l , dopo essere dopo la deformazione, punti vicini sono distanti. Calcolo principi di determinare le variazioni di lunghezza



② Calcolo di determinare le variazioni angolari



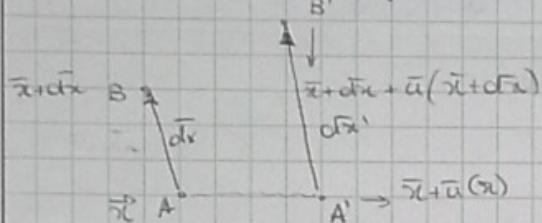
③ Prendiamo un corpo cilindrico che dopo la def si piega. Dove si piega il punto E deve tenere conto delle deformazioni e lo chiamiamo degli sforzi. Consideriamo un elemento, ad esempio, che si è spinto (mole), ma non si deforma. Vorrei che avere E nulla. dunque E è nulla nelle zone rotte senza effettive deformazioni (distorsione o compressione)



Dimostrare pti 3 proprietà



- ① Prendiamo 2 punti x e $x+dx$ (vicini) nelle coppie disgiunte. Dopo la deformazione i 2 punti si spostano e ogni coppia forma calcolerà la lunghezza.



$$|A'B'| = \|d\vec{x}'\| =$$

$$= \|\vec{x}+d\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}+d\vec{x}) - \vec{x} - \vec{u}(\vec{x})\| =$$

$$=$$

con Taylor

$$u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x) + J dx$$

$$= \|\vec{x}+d\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}) + J d\vec{x} - \vec{x} - \vec{u}(\vec{x})\| = \|(I+J) d\vec{x}\| =$$

$$= \sqrt{[(I+J)d\vec{x} \cdot (I+J)d\vec{x}]} = \text{entro la radice (Kdx) \cdot (Kdx)} \\ \text{ho una cosa del tipo}$$

↓
n componenti

$$K_{ij} dx_j K_{ik} dx_k = dx_j K_{ji} K_{ik} dx_k =$$

$$= d\vec{x} \cdot K^T K d\vec{x} \text{ facciamo la prima delle somme}$$

$$= \sqrt{d\vec{x} \cdot (I+J)^T (I+J) d\vec{x}} = \sqrt{d\vec{x} \cdot (I+J^T + J + J^T J) d\vec{x}}$$

lavoro in modo def. dunque $J^T J$ lo posso trascurare, da cui

$$A'B' = \sqrt{d\vec{x} \cdot (I+J+J^T) d\vec{x}} \text{ ma } J+J^T = 2\varepsilon \text{ da cui}$$

$$= \sqrt{d\vec{x} \cdot (I+2\varepsilon) d\vec{x}} = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x} + 2d\vec{x} \cdot \varepsilon d\vec{x}}$$

L'esempio vettore
traslate

poniamo ora ke

$$d\vec{x} = l \vec{n}^D \text{ e dunque avro' ke}$$

$$A'B' = l' = \sqrt{l^2 + 2l^2 \vec{n}^D \cdot \varepsilon \vec{n}^D} = l \sqrt{1 + 2\vec{n}^D \cdot \varepsilon \vec{n}^D} =$$

$\sqrt{1+x}$ con Taylor avremo $1+\frac{x}{2}$, da cui

$$A'B' = l' = l \left(1 + \vec{n}^D \cdot \varepsilon \vec{n}^D \right)$$

(7.4)

la variazione relativa di
lunghezze

ovv

$$\frac{l' - l}{l} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{n} = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

la dir. lungo la quale calcolo
la lunghezza $\vec{n}$ data
dal vettore $\vec{n}$

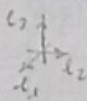
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

dove $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

sicché $\frac{l' - l}{l} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{n}$

Considerando l_1, l_2, l_3
ovv

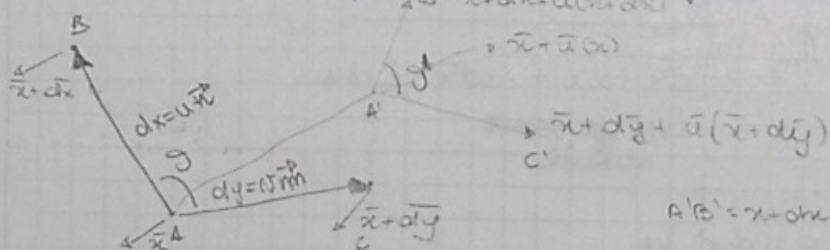
$$\hookrightarrow \frac{l - l'}{l} = \vec{l}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{l}_i = \varepsilon_{ii}$$



$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ rappresentano
le variaz. relative di
lunghezze lungo i 3
assi del sys di riferimento

② Angoli

Consideriamo 3 punti che mi identifichino un angolo θ . Dopo la
deformazione θ'



$$A'B' = \vec{x} + d\vec{x} + \vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{x} - \vec{u}(\vec{x})$$

Sicché $\cos \theta' = \frac{\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}}{\|\vec{A'B'}\| \|\vec{A'C'}\|} = \frac{(\vec{x} + d\vec{x} + \vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{x} - \vec{u}(\vec{x})) \cdot (\vec{x} + d\vec{y} + \vec{u}(\vec{x} + d\vec{y}) - \vec{x} - \vec{u}(\vec{x}))}{\|\vec{A'B'}\| \|\vec{A'C'}\|}$

ma $u(x+dx) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x) + J \partial x$
 $u(x+dy) = \dots = u(x) + J \partial y$ } TAYLOR!!

disegno
↳

$$\frac{[(I+J)d\vec{x} \cdot (I+J)d\vec{y}]}{\| (I+J)d\vec{x} \| \cdot \| (I+J)d\vec{y} \|} = \frac{d\vec{x} \cdot (I+J)^T (I+J) d\vec{y}}{\| (I+J)d\vec{x} \| \cdot \| (I+J)d\vec{y} \|}$$

$$\frac{\| (I+J)d\vec{x} \| \cdot \| (I+J)d\vec{y} \|}{\| (I+J)d\vec{x} \| \cdot \| (I+J)d\vec{y} \|} = \frac{u(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) \cdot v(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}{u(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) \cdot v(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

Le quali
PURA

$$u(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) \cdot v(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})$$

$$= \frac{\mu \vec{n} \cdot (I+J+J^T+J^T J) \vec{m}}{\mu(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) \cdot v(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\vec{n} \cdot \vec{m} + 2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m}} = \frac{\cos \theta}{(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

cosine
è cos
dell'ang
iniziale

$$\Rightarrow \cos \theta' = \frac{\cos \theta + 2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m}}{(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

andiamo a
calcolare la
variazione del coseno

$$\cos \theta' - \cos \theta = \frac{\cos \theta + 2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} - \cos \theta (1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}{(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

vorrei una
formula del
1° ordine,
cioè

$$2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} - \cos \theta (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})$$

non siamo
denominatore.

1

QST perché dovremmo

$$\frac{2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} - \cos \theta (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})}{(1+\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})(1+\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})}$$

$$\times \text{Taylor } \frac{1}{1+x} \approx 1-x \text{ se } x \text{ è piccolo}$$

dovremmo

$$2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} - \cos \theta (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) (1 - \vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) (1 - \vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m})$$

vediamo che
vogliamo 1° ordine

$$\cos \theta' - \cos \theta = 2\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} - \cos \theta (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n})$$

7.6

Cerchiamo di ottenere $\{\theta - \theta'\}$

Se che $\cos(\theta' - \theta) \approx 1$ approssimando Taylor al 1° ordine $1 + \frac{x^2}{2} + \dots = \cos$

$$\sin(\theta' - \theta) \approx \theta' - \theta$$

$$\cos(\theta' - \theta) = \cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta$$

$$\sin(\theta' - \theta) = \sin\theta' \cos\theta - \sin\theta \cos\theta'$$

ricavo $\sin\theta'$ dalle
1° e lo metto nelle 2°

$$\sin\theta' = \frac{1 - \cos\theta' \cos\theta}{\sin\theta}$$

allora

$$\theta' - \theta = \frac{1 - \cos\theta' \cos\theta}{\sin\theta} \cos\theta - \sin\theta \cos\theta' =$$

$$= \frac{1 - \cos\theta \cos\theta' - \cos\theta^2 \cos\theta' - \sin^2\theta \cos\theta'}{\sin\theta} =$$

$$\frac{\cos\theta - \cos\theta'}{\sin\theta} = \theta' - \theta$$

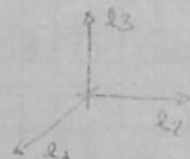
da cui

$$\theta' - \theta = \frac{\cos\theta (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}) (\vec{m} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m}) - 2 \vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m}}{\sin\theta}$$

CVD

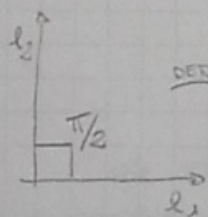
Calcoliamo gli elementi della matrice ϵ

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$



$$\frac{l - l'}{l} = \vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{n}$$

$$\theta - \theta' = \pi/2 \rightarrow \theta' - \theta = -2 \vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \vec{m}$$

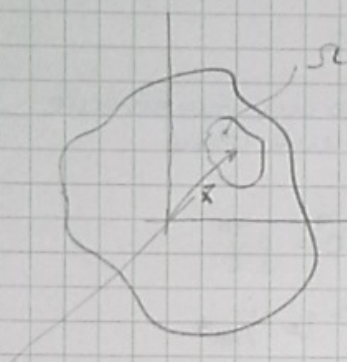


$$\theta' - \pi/2 = -2 \vec{e}_1 \cdot \vec{\epsilon} \vec{e}_2 = -2 \epsilon_{12}$$

$$\theta' - \pi/2 = -2 \epsilon_{ij} \quad i \neq j$$

Quindi, tenuti
con i vettori diversi
hanno legame
con gli spostamenti
angoli retti dopo
la deformazione
secondo questa relazione

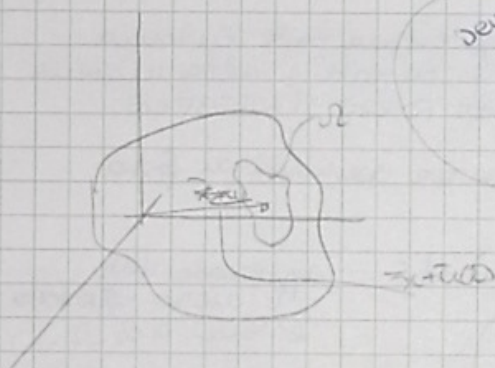
③ È nulla la rotazione deformazione



Considero l'angolo θ e la parte Ω con punto centrale di punto $\bar{x}$.

Ipotesi che dopo la deformazione la regione Ω ruota ma non si deforma.

$$\bar{x} + \bar{u}(\bar{x}) = \underbrace{R\bar{x}}_{\text{ROT}} + \underbrace{\bar{d}}_{\text{TRASL}}$$



sezione

[In una zona infinitamente rotazionale ϵ vale zero]

de più poco maggiore e campo di spostamenti $\bar{u}(\bar{x})$

$$\bar{u}(\bar{x}) = (R - I)\bar{x} - \bar{d}$$

io so che $J = \frac{\partial u}{\partial x} = (R - I)$ (costante)

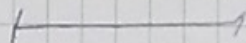
hanno sempre nell'ipotesi che $J^T J \geq 0$, verificandolo $J^T J = (R - I)^T (R - I) =$

$$= \underbrace{(R^T R)}_{=I} - R^T - R + I = \underbrace{I - R^T}_{-J^T} - \underbrace{R + I}_{-J} = -J^T - J \quad \text{se è uguale a zero deve avere}$$

$$J^T = -J$$

[è antisimmetrica dunque $\epsilon = 0, \Omega = J$]

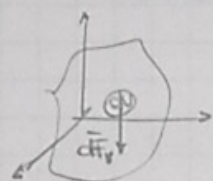
PARTE SIMMETRICA
È NULLA $\epsilon = 0$ È
TOTALMENTE ANTISIMMETRICA.



TENSORI DEGLI SFORZI

Dobbiamo analizzare le forze in un corpo continuo

- forze di volume $\rightarrow$ forze dall'interno che agiscono uniformemente sull'intero volume secondo una certa densità

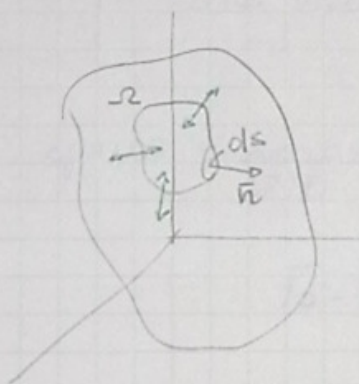


$$d\vec{F}_V = \vec{b} dv$$

$\vec{b}$ densità di forze

es. la gravità $\vec{b} = \rho \vec{g}$
 $\vec{b}$ lo stesso. $\sim N/m^3$

- forze di superficie $\rightarrow$ Consideriamo sempre e una parte interna. Dopo la separazione, la parte e altra materia n'accompanya anche FORZE DI SUPERFICIE.



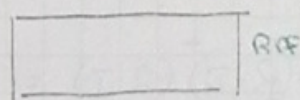
Ma una distribuzione continua di forze all'esp.

$$d\vec{F}_S = \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS$$

applicato dal mezzo interno esterno ad S .

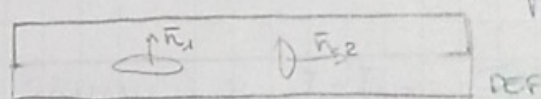
Ma che d.p. da $\vec{n}$? $\sim N/m^2$ non è un vettore, dipende da $\vec{n}$

ALL SENZA CARIC. CARIC.



$n_1 \rightarrow$ unità privanella

$n_2 \rightarrow$ l'altro lato



Il teorema di Cauchy ci dice come $\vec{f}(\vec{x}, \vec{n})$ dipende da $\vec{n}$

$$\vec{F}_{TOT}(\text{su } S) = \int_V \vec{b}(\vec{x}) dv + \int_S \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS$$

forze totali
sulle superficie S

FISICA DEI MATERIALI E DEI DISPOSITIVI

avevamo definito forze di volume $d\vec{F}_V = \vec{b} dV$

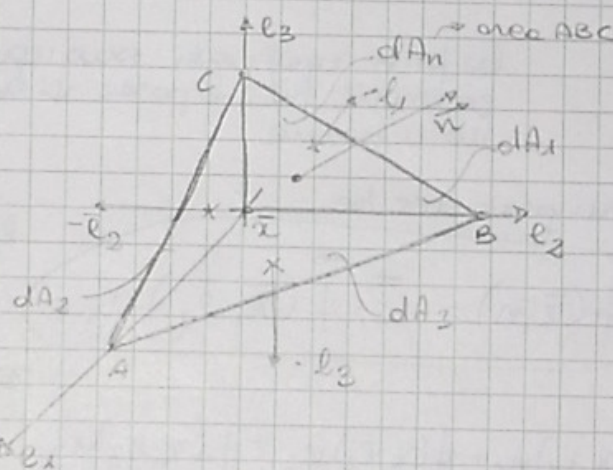
e forze distribuite

$$d\vec{F}_S = \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS$$

che dipende dall'orientazione della sup. dS rispetto al corpo.

Lo applicata dall'esterno verso l'interno
 → Il teo di Cauchy cui si riferisce
 di forze dipendenti (razionale teoria)

Consideriamo un volume interno al corpo. Prendiamo una terna di assi centrata nel punto dove ci interessa con vettore $\vec{x}$



$\vec{n}$ è vettore normale al piano ABC.

Scriviamo le f totali applicate al tetraedro.

forze applicate alle facce avente un'area

$$\vec{F}_{tot} = \vec{b} dV + \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dA_n + \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_1) dA_1 + \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_2) dA_2 + \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_3) dA_3 +$$

forze

vol. tetraedro

$$+ \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_2) dA_2$$

coefficienti delle 3 facce dA_1, dA_2, dA_3 (2 piani coordinati)

ma $\vec{F}_{tot} = m \cdot \vec{a}$, basterà che $m = \rho dV$, e che $dV = \frac{1}{3} dA_n h$ (h distanza fra piano ABC e $\vec{x}$)

Quel che $dA_i = n_i dA_n$ d'area laterale è la proiezione di quella obliqua. Sostituiamo tutto e otteniamo

$$\vec{b} \frac{1}{3} dA_n h + \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dA_n + \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_1) n_1 dA_n + \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_2) n_2 dA_n + \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_3) n_3 dA_n = \rho \frac{1}{3} dA_n h \cdot \vec{a}$$

il ruolo del volume interno al corpo complessivo

La F_{tot} non dipende dall'area delle facce del cubo, dunque non dipende dalla superficie.

Facciamo limit di tutto questo (piuttosto a fine rapporto $\bar{x}$)

→ ottengo $\vec{f}(\bar{x}, \vec{n}) = - \vec{Z}_i \vec{f}(\bar{x}, \vec{e}_i) \cdot n_i$ definisce la modalità di dipendenza di $\vec{f}$ da $\vec{n}$

Se consideriamo $n = e_j \Rightarrow \vec{f}(\bar{x}, \vec{e}_j) = - \vec{f}(\bar{x}, -\vec{e}_j)$ è chiaro in e_j vale la legge di azione/reazione sui piani contigui

Le forze superficiali sono uguali e contrarie per i 2 piani di cont. che li separano

Da qui posso dire che

$$\vec{f}(\bar{x}, \vec{n}) = \vec{Z}_i \vec{f}(\bar{x}, \vec{e}_i) n_i$$

La dipendenza di $\vec{f}$ da $\vec{n}$ è lineare, ma 9 numeri che ho qui dentro

$$\underbrace{f(x, e_1)}_{3 \text{ qui}} n_1 + \underbrace{f(x, e_2)}_{3 \text{ qui}} n_2 + \underbrace{f(x, e_3)}_{3 \text{ qui}} n_3 =$$

$$\begin{bmatrix} f(x, e_1) & f(x, e_2) & f(x, e_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} =$$

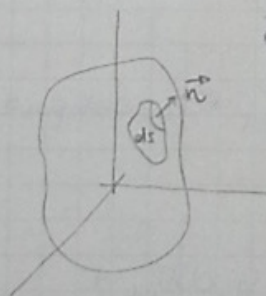
↳ VERSIONE n

$= T \vec{n}$ la dipendenza lineare tramite tensori degli spazi

TENSORE DEGLI SPAZI
 $T(x)$

→ ogni elemento $\vec{f}$ di una $\vec{f}$ come uno vettore

RICAPITOLANDO



$d\vec{F}_S = \vec{f}(\bar{x}, \vec{n}) dS$ una $\vec{f}(\bar{x}, \vec{n}) = T(x) \vec{n}$ da cui

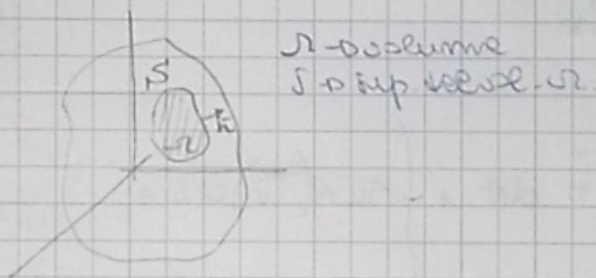
$$d\vec{F}_S = T(x) \vec{n} dS$$

DISTRIBUZIONE DI FORZE SULLA SUPERFICIE DELLA PARTE INTERNA

Studiamo ora a vedere le equazioni fondamentali della
teoria delle elasticità, applicando le 2 eq. cardinali
al mezzo continuo.

1^a EQ. CARDINALE $\rightarrow$ quant. moto

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} \rightarrow \text{quant. moto totale}$$



$$F_{\text{tot}} = \int_V \bar{b}(\vec{x}) dV + \int_S T(\vec{x}) \vec{n} dS =$$

$\int_V \bar{b}(\vec{x}) dV$ $\rightarrow$ forze in volume
 $\int_S T(\vec{x}) \vec{n} dS$ $\rightarrow$ forze in superficie

$$= \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV$$

$\int_V \rho \vec{v} dV$ $\rightarrow$ quantità di moto

Cio' come comporre?

Scriviamole in componenti:

$$\int_V b_i dV + \int_S T_{ij} n_j dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{du_i}{dt} dV$$

$\rightarrow v_i = \frac{dx_i}{dt}$
 consideriamo $\rho = \text{costante}$ (per piccole def.)

Per trovare delle equazioni d'equilibrio

$$\int_V b_i dV + \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} dV$$

$\int_V \phi n_j dS = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dV$

$$\int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right] dV = 0$$

vale per ogni volume, dunque
l'espressione fra [] è nulla
ottenendo l'eq. cardinale

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}$$

la derivata è x
magari spostata

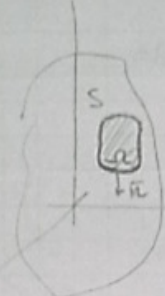
2^a EQUAZIONE CARDINALE $\rightarrow$ mem. punti, moto: prende peso
fma nella origine

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

mau p F
applicate

$$\int_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{b} \, d\vec{r} + \int_S \vec{x} \wedge (T\vec{n}) \, dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{x} \wedge \rho \vec{v} \, d\vec{r}$$

BRACCIO $\wedge$ FORZA



velocità

Scriviamo in componenti

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij} x_i b_j \, d\vec{r} + \int_S \varepsilon_{kij} x_i (T_{jq} \vec{n}_q) \, dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij} x_i \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} \, d\vec{r}$$

appliciamo il nuovo teorema delle divergenze

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij} x_i b_j \, d\vec{r} + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij} \frac{\partial (x_i T_{jq})}{\partial x_q} \, d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij} x_i \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} \, d\vec{r}$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij} \left[x_i b_j + \frac{\partial x_i}{\partial x_q} T_{jq} + x_i \frac{\partial T_{jq}}{\partial x_q} - \rho x_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right] d\vec{r} = 0 \quad \forall \Omega$$

δ di Kronecker $\delta_{iq} T_{jq} = T_{ji}$

quello che è densità accelerata
 $\rightarrow$ da zero, negli Ω con

$$\varepsilon_{kij} \left[x_i \left(b_j + \frac{\partial T_{jq}}{\partial x_q} \right) + T_{ji} \right] = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\varepsilon_{kij} T_{ji} = 0} \Rightarrow T \text{ è simmetrica} \quad \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{123} T_{32} + \varepsilon_{132} T_{23} = 0 \Rightarrow$$

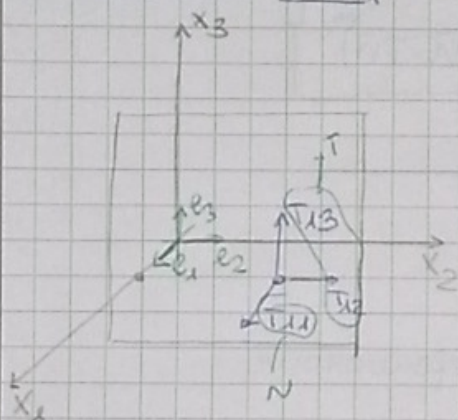
$$\epsilon_{kij} T_{ji} = 0$$

la 2^a equazione condizionale applicata ai
membrani elastici semplici che il
tensore degli spalti è sempre simmetrico

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = T \vec{n} \quad dF_s = T \vec{n} ds$$

Consideriamo $\vec{n} = \vec{e}_1$



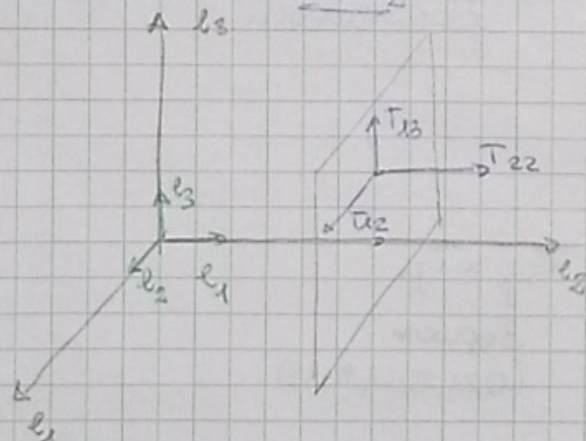
$$T \vec{n} = T \vec{e}_1$$

$$T \vec{n} = T \vec{e}_1 = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{bmatrix}$$

T_{11} è spazio normale alla faccia

T_{12}, T_{13} spalti di taglio

Consideriamo $\vec{n} = \vec{e}_2$

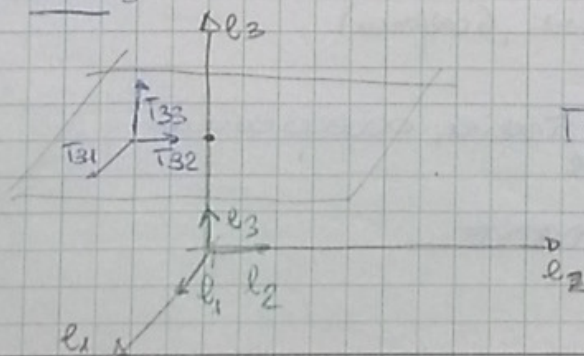


$$T \vec{n} = T \vec{e}_2 = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix}$$

T_{22} normale

T_{12}, T_{23} taglio

ovv $\vec{n} = \vec{e}_3$

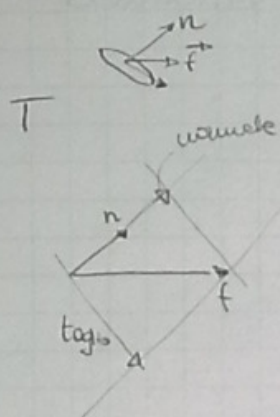


T_{33} normale

T_{13}, T_{23} taglio

$$\begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

Abbiamo Tabbiamo ed n puntieri. Come trovo spinti normali e tangenziali?



$$\bar{f} = T\bar{n}$$

Per avere f e f_{tang} , devo ricavare le componenti $\perp$ e $\parallel$ alla superficie

$$f_n = \bar{n} \cdot \bar{f} = \bar{n} \cdot T\bar{n} \quad \text{scal}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_n &= (\bar{n} \cdot T\bar{n}) \bar{n} \quad \text{vet} \\ \bar{f}_t &= \bar{f} - \bar{f}_n = T\bar{n} - \bar{n}(\bar{n} \cdot T\bar{n}) \end{aligned} \right\}$$

RIEPILOGO

abbiamo calcolato $u_i(x)$ da cui ricavo la deformazione

STRAIN
TENSOR

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

3 equaz.

permette di calcolare variazione di length + angles di angoli di $\pi/2$ e che è nulla con rotazioni

Poi abbiamo detto che ho 2 tipi di forze

$$\int d\bar{F}_v = \bar{b} dv \quad d\bar{F}_s = T\bar{n} ds$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

3 equaz.
(j=1,2,3)

$$T_{ij} = T_{ji}$$

3 equaz.
(12,21,23,32,31,13)

Ho quindi 12 equazioni (3^{1°} ord., 3^{2°} ord., 6 strain)

Ho però 15 incognite (3 spostam., 6 sforzi, 6 deform.)

Manca la relazione fra stress e strain, ovvero come risponde il corpo alla sollecitazione

↳ EQUAZIONI COSTITUTIVE

Equaz. costitutive $\rightarrow$ Relazioni fra T ed E

Potrebbe essere $\rightarrow$ NON LINEARI
LINEARI

$T = f(E)$
 $T \propto E$ } dipende dal
materiale
che va da considerare

si scrive

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

$T_{ij} = f(E) \rightarrow$ RECAP. COSTITUTIVE

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$\Rightarrow$ 3 EQ CON
3 INCOGNITE
 u_1, u_2, u_3

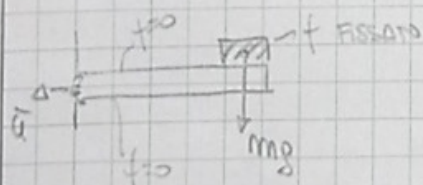
mi servono le condizioni
al contorno, infatti ho delle equazioni alle
derivate parziali

Potremmo dire di avere un corpo
in mano. Dobbiamo la superficie
in 2.

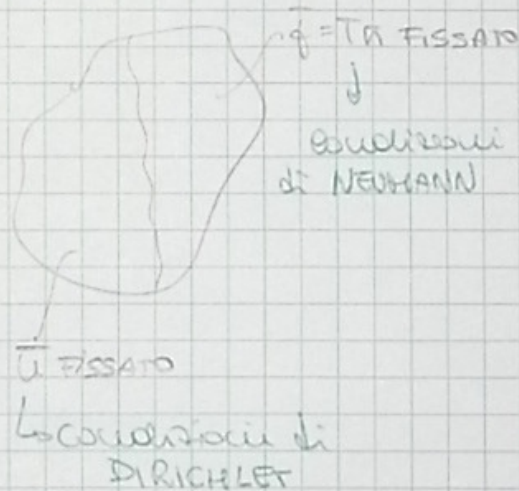
In una parte applico
delle forze $\vec{f} = T\vec{n}$ che
conosco

D'altra parte la tenuta (u fissato)

Considerando una
cavità ho la parte
fissata che ha una pressione
nota. D'altra parte ho invece
una f nota applicata



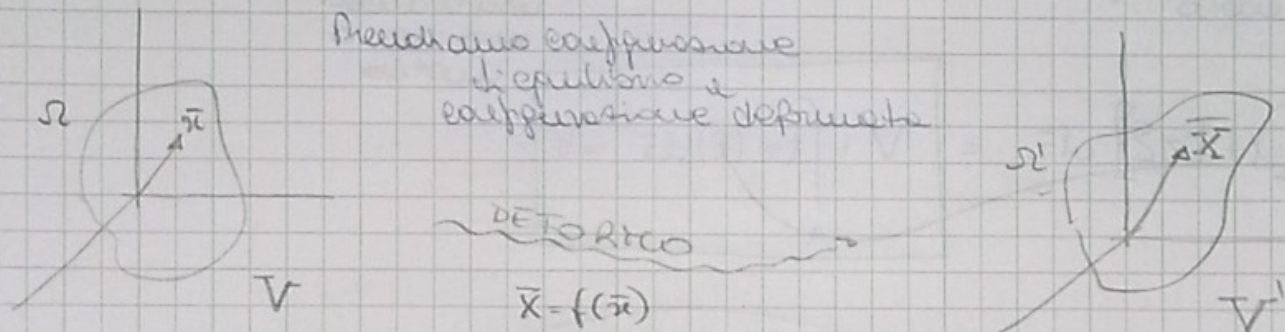
Sue condizioni
le vanno bene
per sempre.



Ho sempre 1 sola ~~eq~~ soluzione
per ogni sistema

ESERCIZIO 1

Studiamo a vedere come calcolare le variaz. di volume locale con tenere delle deformazioni



$$V = \int_{\Omega} d\bar{x}$$

$$V' = \int_{\Omega'} d\bar{x}'$$

Calcoliamo V' in funzione di V

$$\bar{x}' = f(\bar{x}) = \bar{x} + \vec{u}(\bar{x})$$

campo di spostamenti

dalle equazioni di equilibrio

$$V' = \int_{\Omega'} d\bar{x}' = \int_{\Omega} \det \left[\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}} \right] d\bar{x}$$

→ matrice delle der. parz.

ma io so che

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{x} + \vec{u}(\bar{x})) = \mathbf{I} + \mathbf{J}$$

↑ $\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}}$ ↑ $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

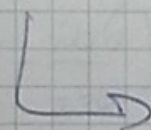
dobb. calcolare il determinante

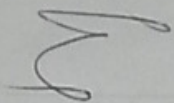
Avremo che $\mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} \rightarrow \det(\mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{\Omega})$ può essere calcolato sempre con avvedute

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{11} & \epsilon_{12} + \rho_{12} & \rho_{13} + \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} - \rho_{12} & 1 + \epsilon_{22} & \rho_{23} + \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} - \rho_{13} & \epsilon_{23} - \rho_{23} & 1 + \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

↑ ϵ_{ij} ↑ ρ_{ij} ↑ $\det$

↑ matrice di deformazione
 ↓ calcolando avvedute





11.2

$$\approx (1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}) \text{ # le nostre } \varepsilon \text{ sono } \text{piccole} \approx 1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = 1+t_r(\varepsilon)$$

riunificando
nell'integrale
avuto

gli altri
prodotti
sono trascurabili
x lo stesso
motivo

$$\int_V [1+t_r(\varepsilon)] d\bar{x} = V + \int_V t_r(\varepsilon) d\bar{x} = V'$$

dunque la variaz. di
volume per piccoli
spostamenti sono

$$\Delta V = \int_V t_r(\varepsilon) d\bar{x}$$

VARIAZ.
DI
VOLUME

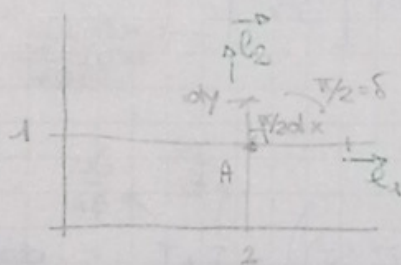
anche scritto
come

$$\frac{dV' - dV}{dV} = t_r(\varepsilon)$$

$t_r(\varepsilon) \begin{cases} > 0 & \text{ESPANSIONE} \\ = 0 & \text{NON VARIA IL VOL} \\ < 0 & \text{COMPRESIONE} \end{cases}$

Esercizio 2

$$\begin{aligned} \vec{u} = 0 \quad u_1 &= k(2x+y^2) \\ u_2 &= k(x^2-3y^2) \\ A(2,1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} dy' &= ? \\ dx' &= ? \\ \theta' &= ? \\ A' &= ? \end{aligned}$$

Un punto fisico $P = (x, y)$ dopo lo spostamento
avuto $P' = (x + k(2x+y^2), y + k(x^2-3y^2))$

$$A = (2,1) \Rightarrow A' = \left(2 + k(4+1), 1 + k(4-3) \right)$$

definizione

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sim \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2k & \frac{1}{2}(2ky + 2kx) \\ k(uy) & -6ky \end{bmatrix} \leadsto \Sigma(A) = \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ 3k & -6k \end{bmatrix}$$

VARIAZ WING

$$\frac{l' - l}{l} = \vec{n} \cdot \Sigma \vec{n}$$

VARIAZ ANGOLO

$$\frac{\theta' - \theta}{\theta} = -2 \vec{n} \cdot \Sigma \vec{n}$$

$$\frac{dx' - dx}{dx} = \bar{l}_1 \cdot \Sigma(A) \bar{l}_1 = (1, 0) \cdot \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ 3k & -6k \end{bmatrix} (1, 0) =$$

$$= (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \end{pmatrix} = \boxed{2k = \text{VAR WINGEN}}^*$$

$$\frac{dy' - dy}{dy} = \bar{l}_2 \cdot \Sigma(A) \bar{l}_2 = (0, 1) \cdot \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ 3k & -6k \end{bmatrix} (0, 1) =$$

$$= (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 3k \\ -6k \end{pmatrix} = \boxed{-6k = \text{VAR WINGEN}}^y$$

Per l'angolo

$$\frac{\theta' - \theta}{\theta} = \theta' - \theta = -2 \bar{l}_1 \cdot \Sigma \bar{l}_2 = -2(1, 0) \cdot \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ 3k & -6k \end{bmatrix} (0, 1) =$$

$$= (-2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3k \\ -6k \end{pmatrix} = -6k \leadsto \boxed{\theta' = -6k + \frac{\pi}{2}} \text{ nuovo angolo}$$

IN OTTO: ENTRO AL TAVOLO E DUE ADDIZIONALI

—————

11.4

ESERCIZIO 3

conosciamo la
tensore degli
spinti T

$$T = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 5 & 20 & -15 \\ -10 & -15 & -10 \end{bmatrix} \quad (N/m^2)$$

Conosciamo

$$\vec{n}^D = (1/2, 1/\sqrt{2}, ?) \quad n_3 > 0$$

vogliamo conoscere $\vec{f}$, $\vec{f}_T$, $\vec{f}_n$

misure le 3 componenti
e so che $\|\vec{n}\| = 1$ da cui

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (n_3)^2 = 1$$

$$(n_3)^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow n_3 = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo $\vec{f}$ $\vec{f} = T \cdot \vec{n}^D$ ($f_n = (\vec{n} \cdot T \vec{n}) \vec{n}$, $\vec{f}_T = \vec{f} - \vec{f}_n$)

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 5 & 20 & -15 \\ -10 & -15 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 + 20/\sqrt{2} - 15/2 \\ -5 - 15/2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 + 4/\sqrt{2} \\ -2 + 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_n = (\vec{n} \cdot T \vec{n}) \vec{n} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{f}_n\| = \vec{n}^D \cdot \vec{f} = \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + 4/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(-2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$$

moltiplicando per $\vec{n}$ tutto va bene. da cui

$$\vec{f}_T = \vec{f} - \vec{f}_n$$

ES. 4

Ho un corpo in equilibrio. Ma E' ep. statico, non ho max. fine del volume. 4e funzione degli spazi e con pbb.

$$T = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - z & z - 6xy - \frac{3}{4} & x + y - \frac{3}{2} \\ z - 6xy - \frac{3}{4} & 3y^2 & 0 \\ x + y - \frac{3}{2} & 0 & 3x + y - z + \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

E' ineq. ne

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

dal testo

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0$$

Sostituiamo e vediamo se e' soddisfacibile

$$6x + -6x + 0 = 0 \quad \text{OK}$$

$$-6y + 6y + 0 = 0 \quad \text{OK}$$

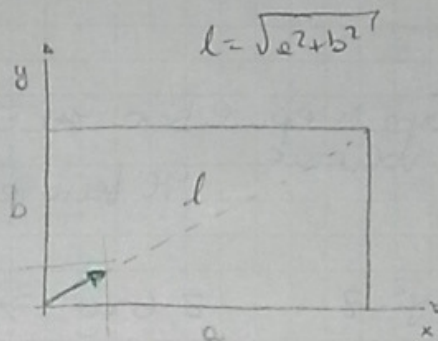
$$1 + 0 - 1 = 0 \quad \text{OK}$$

=> il campo di spostamento e' ammissibile

ES. 5

trovare esp. matriciale
nell'angolo sotto dato
in modo arbitrario

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \text{NOTA.}$$



quanto vale l' (top. la deformazione)?

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\frac{l' - l}{l} = \vec{n} \cdot \varepsilon \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\varepsilon_{xy} b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{\varepsilon_{yx} a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\varepsilon_{yy} b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} a^2}{a^2+b^2} + \frac{\varepsilon_{xy} b a}{a^2+b^2} \\ \frac{\varepsilon_{yx} a b}{a^2+b^2} + \frac{\varepsilon_{yy} b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} a^2 + \varepsilon_{xy} ab + \\ \varepsilon_{yx} ab + \varepsilon_{yy} b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} \left[\varepsilon_{xx} a^2 + \varepsilon_{yy} b^2 + ab (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) \right] = \frac{l' - l}{l}$$

da cui

$$l' = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} \frac{1}{a^2+b^2} \left[\varepsilon_{xx} a^2 + \varepsilon_{yy} b^2 + 2ab \varepsilon_{xy} \right] =$$

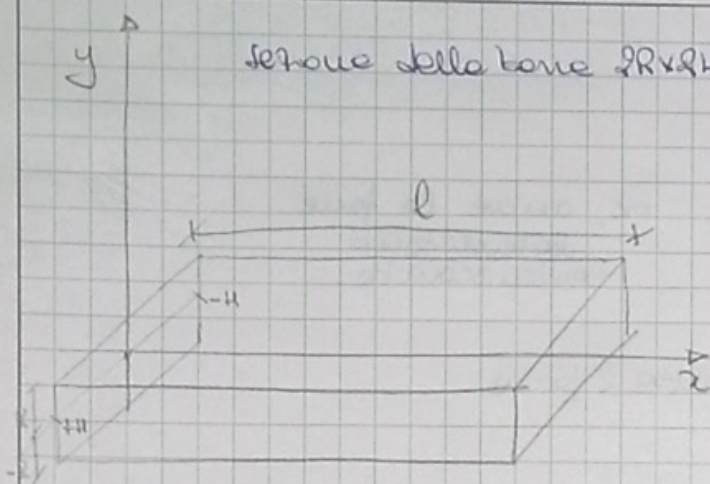
FISICA DEI MATERIALI E DEI DISPOSITIVI

Esercizio 1

sezione della bone PRVPH

HVE conosci

- Il T dato è quello corretto per gli bonette?



$$T = \begin{bmatrix} \frac{My}{I} - \frac{V}{I}(l-x)y & \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) & 0 \\ \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} - \text{no predizione} \\ - \text{esotermico} \end{array}$$

devo verificare

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} + \frac{Vx}{I} - \frac{Vy}{I} = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{OK}$$

Supponiamo la bonetta incrinata a sinistra, e destra (in $x=l$) può fare a meno?

Le altre superfici hanno forze nulle (forze dal terreno degli sport)

VERIFICHIAMO

$y = \pm R$ (xip, inf e xip)

che $\vec{f} = T \vec{n}$ e in punto fine ho $\vec{n} = \vec{e}_2$, Suo piano è prodotto scalare

$$\begin{bmatrix} \otimes & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso solo $\neq 0$

$$\begin{array}{l} \otimes \neq 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Lo moltiplichiamo per $\vec{e}_2$ che è $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Face laterale

$$Q = \pm h$$

$$\vec{n} = \vec{e}_3$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

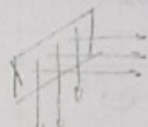
ok, anche la face laterale non ha contributo.

Andiamo ora a considerare la altre 2 face.

$$- [x=l] \quad \vec{n} = \vec{e}_1$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{My}{I} & \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) & 0 \\ \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{My}{I} \\ \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

FACIA DESTRA



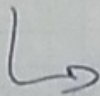
$$\vec{f} = \frac{My}{I} \vec{e}_1 + \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) \vec{e}_2$$

Andiamo a calcolare la risultante e la man. globale

$$\vec{F} = \iint_{-h \leq z \leq h, -R \leq y \leq R} \vec{f} dS = \iint \vec{f} dz dy = \int_{-h}^h \int_{-R}^R \left(\frac{My}{I} dy dz \vec{e}_1 + \frac{V}{2I}(R^2 - y^2) dy dz \vec{e}_2 \right)$$

$$= 2h \frac{M}{I} \frac{y^2}{2} \Big|_{-R}^R \vec{e}_1 + 2h \frac{V}{2I} \left(R^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R \vec{e}_2 =$$

$$= \frac{HV}{I} \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \vec{e}_2 = \boxed{\frac{4HV}{3I} R^3 \vec{e}_2 = \vec{F}}$$

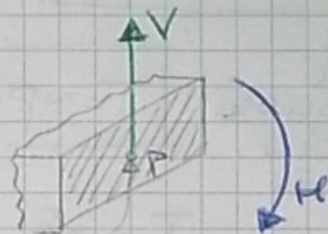


che $I = \text{mom. inerzia}$

$$I_y = \iint y^2 dy dz = \int_{-H}^{+H} \int_{-R}^{+R} y^2 dy dz = 2 \frac{4}{3} R^3 H = I_y$$

dunque sostituendo
nelavo

$$\vec{F} = V \vec{e}_2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{LA RISULTANTE} \\ \text{E' UNA FORZA } V/100 \text{ dy} \end{array} \right.$$



Analizziamo ora e calcolare
il momento risultante (rispetto al centro della barra)

$$\vec{M}_P = \iint \vec{r} \wedge \vec{f} \, ds \quad \text{dove} \quad \vec{r} = y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

$$\vec{f} = \frac{\mu y}{I} \vec{e}_1 + \frac{V}{2I} (R^2 - y^2) \vec{e}_2$$

$$= \int_{-R}^{+R} \int_{-H}^{+H} \left[\frac{\mu y^2}{I} (-\vec{e}_3) + \frac{\mu y z}{I} (\vec{e}_2) + \frac{V}{2I} (R^2 - y^2) z (-\vec{e}_1) \right] dz dy =$$

facendo step
in 3 variabile
a 9610

$$= \int_{-R}^{+R} \int_{-H}^{+H} \frac{\mu y^2}{I} \vec{e}_3 \, dz dy =$$

$$- 2H \frac{\mu}{I} \frac{y^3}{3} \Big|_{-R}^{+R} \vec{e}_3 =$$

$$= - \frac{4}{3} R^3 H \frac{\mu}{I} \vec{e}_3 = - \mu \vec{e}_3 \quad \text{mom. risultante che cerca di far ruotare la barra}$$

$$\boxed{\vec{M}_P = -\mu \vec{e}_3}$$

Per conoscere la forma finale darei valore a E . riuscire però
la relazione costitutiva (legame σ/ϵ). Non è però
risolto gli spostamenti

ESERCIZIO 2

APPLICAZ. alla meccanica dei fluidi

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho a_j \quad \text{senza}$$

Nei fluidi
ho T che
è diagonale
e con elem.
uguali

$$T = -p I$$

~~senza~~ $T_{ij} = -p \delta_{ij}$

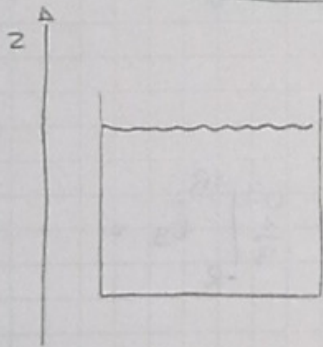
$$T_{ij} = -p \delta_{ij}$$

$$T = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Sostituendo T nella 1^a eq.

$$\frac{\partial (-p \delta_{ij})}{\partial x_i} + b_j = \rho a_j \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x_i} \delta_{ij} + b_j = \rho a_j$$

da cui $\boxed{-\nabla p + \bar{b} = \rho \bar{a}}$



All'equilibrio

Ho $\bar{a} = 0$ Ho $\bar{b} = -\rho g \bar{e}_z$ (1)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0$$

$$p = p(x, y, z)$$

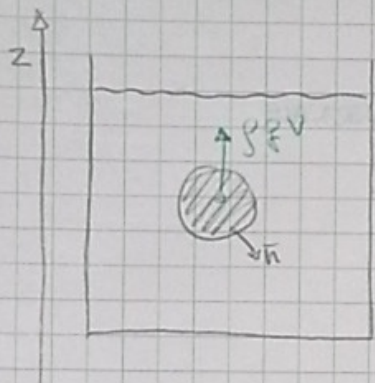
risolviamo
le 3^e equazione

$$\hookrightarrow \boxed{p(z) = -\rho g z + \text{cost}}$$



Dedurre la legge di Archimede $\rightarrow$ verificandola
 l'esperienza nel fluido

$$p(z) = -\rho g z + \text{cost}$$



$$\vec{T} = -p \vec{I} = (\rho g z + \text{cost}) \vec{I}$$

Chiamo S la superf. interna
 del corpo, e $\vec{n}$ è verso

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T} \cdot \vec{n} \quad \vec{F} = \oint_S \vec{f} \, dS$$

$$[\vec{I} \cdot \vec{n} = \vec{n}]$$

quindi

$$\oint_S (\rho g z + \text{cost}) \vec{n} \, dS$$

con la divergenza diventa
 un integrale di volume

$$\vec{F}_i = \oint_S (\rho g z + \text{cost}) \vec{n} \, dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g z + \text{cost}) \, dV$$

$$\vec{F}_x = 0 \quad \vec{F}_y = 0$$

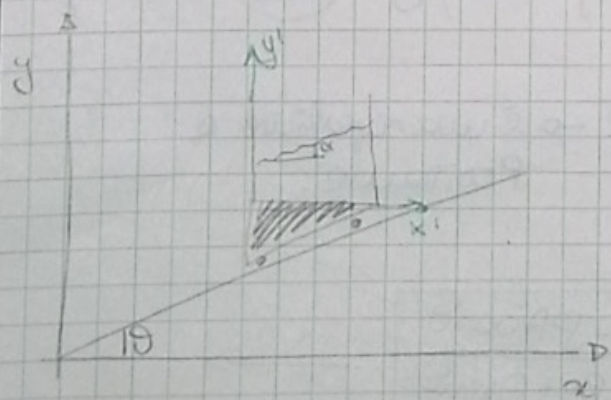
$$\vec{F}_z = \rho g \int dV = \rho g V$$

$$\boxed{\vec{F}_z = \rho g V}$$

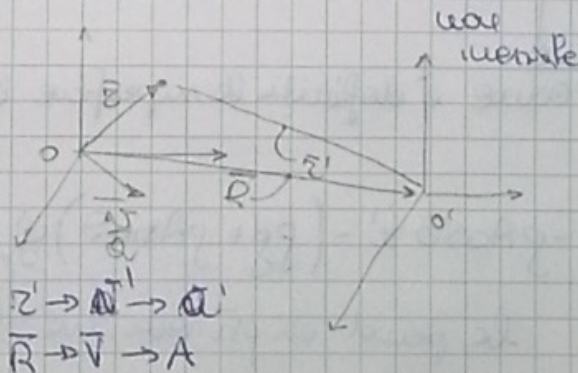
Forza verso l'alto
 pari al peso
 del fluido spostato

(3)

Consideriamo un piano inclinato con un angolo θ . Ho una macchina
 con un motore. Se la macchina è A , quale angolo fanno
 le forze rispetto all'orizzontale?



forze inerte



$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}' + \bar{R} \\ \bar{n} &= \bar{n}' + \bar{V} \\ \bar{a} &= \bar{a}' + \bar{A} \end{aligned} \right\} \bar{F} = m(\bar{a}' + \bar{A})$$

Dunque avrò

$$\boxed{-\bar{\nabla}p + \bar{b} = \rho \bar{a}} \quad \text{INERT.}$$

$$\boxed{-\bar{\nabla}p' + \bar{b}' = \rho(\bar{a}' + \bar{A})} \quad \text{NON INERTALE}$$

$$\bar{A} = (A \cos \vartheta, A \sin \vartheta)$$

$$\bar{b}' = (0, -\rho g)$$

$$p' = p'(x, y)$$

$\bar{a}' = 0$ se il fluido è fermo nel sys di riferimento ~~inertale~~.
non inertale



$$-\bar{\nabla}p' + \bar{b}' = \rho \bar{A}' \Rightarrow \bar{\nabla}p' = \bar{b}' - \rho \bar{A}'$$

in componenti

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial x'} = -\rho A \cos \vartheta & ; & \frac{\partial p'}{\partial y'} = -\rho g - \rho A \sin \vartheta \end{cases}$$

da cui

$$\left[p(x', y') = -\rho A \cos \vartheta x' - (\rho g + \rho A \sin \vartheta) y' + \text{cost} \right]$$

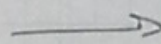
la cost. dipende
di come
si sceglie
l'origine

come è definita la superficie libera? $\rightarrow$ è una superficie a p costante.

$$-\rho A \cos \vartheta x' - (\rho g + \rho A \sin \vartheta) y' = \text{cost}$$

la pendenza di p'n nella x

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{-\rho A \cos \vartheta}{\rho g + \rho A \sin \vartheta}}$$



ordenando mejor tiempo

$$\tan \delta = - \frac{A \cos \theta}{g + A \sin \theta} = - \frac{A}{g} \cos \theta - \frac{A^2}{g} \cot \theta$$

eliminanti

$$\tan \delta = \frac{-1}{\frac{g}{A \cos \theta} + \cot \theta} = \frac{-1}{\frac{g}{A} \sec \theta + \cot \theta}$$

$L \rightarrow 1/\cos \theta$

o anche

$$\cot \delta + \cot \theta + \frac{g}{A} \sec \theta = 0$$

Se $A \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \delta = \mp \frac{1}{\tan \theta}$

Se scivolo lungo piano inclinato?

$$A = -g \sin \theta$$

$$\tan \delta = \frac{-1}{\frac{g}{g \sin \theta \cos \theta} + \cot \theta} = - \frac{1}{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = - \frac{\cos \theta}{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta}}$$

$$\tan \delta = \tan \theta \rightarrow \delta = \theta$$

STRAIN TENSOR

Equazioni di compatibilità (o congruenza)

Una posizione deformata è descritta da un campo di spostamenti $\vec{u}$.

~~Non è un vettore~~ $\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ lo divide in 2 blocchi

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}$$

dove $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ termine delle deff.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

termine delle rotazioni

ϵ_{ij} aveva 3 proprietà che avevamo ricavato precedentemente.

↳ Se conosco u_1, u_2, u_3 molto pochi problemi (calcolo tutto)

Se invece conosco ϵ_{ij} , come
ricavo u_1, u_2, u_3 ?
O meglio, noti $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ e
noti degli ϵ o σ , è sempre
possibile risalire a u_1, u_2, u_3 ?

(Non posso scrivere
delle formule inverse.)

↳ NO, L'INVERSIONE È
POSSIBILE SOLO SE LE
COMPONENTI ϵ_{ij} SODDISFANO
CERTI CONDIZIONI.

Concludiamo di ricavare tali
equazioni.

EQUAZ. COMPATIBILITÀ



Se esistono u_i che soddisfanno $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, allora
 è vero che $\varepsilon_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij}$

Teo 10.10.10: [un campo vettoriale $\vec{V}$ si può scrivere
 come $\vec{V} = \vec{\nabla} \psi$ se e solo se il
 rotore del campo è nullo $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$]

Sviluppando gli indici, avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{un campo vett. } V_j \text{ si può scrivere} \\ \text{come } V_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \text{ se} \\ \text{e solo se } \frac{\partial V_k}{\partial x_s} - \frac{\partial V_s}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right.$$

Considerando $V_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ per uguale, come specificato
 matematica, e $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dove
 avere che:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (\varepsilon_{ik} + \Omega_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{is} + \Omega_{is}) = 0 \quad \text{Condizione di} \\ \text{Rotore Nullo}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_s} - \frac{\partial \varepsilon_{is}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Omega_{is}}{\partial x_k} \right) = 0$$

↓ POSSO SCRIVERE INVERSA con $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, ovvero

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_s} - \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_s \partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_s} \right) = \boxed{\frac{\partial \Omega_{sk}}{\partial x_i}}$$

Rimettendo tutto
a posto

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_s} - \frac{\partial \varepsilon_{is}}{\partial x_k} \right)}_{\text{CAMPO } V_i} = - \frac{\partial \Omega_{sk}}{\partial x_i} \rightarrow \text{POTENZIALE DEL CAMPO } V_i$$

E' bene fruire di
prima, dunque
i primi 2 termini
li posso vedere
come un
vettore V_i e poi
ora applico il teorema
enunciato prima, ovvero

$$V_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = 0$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_s} - \frac{\partial \varepsilon_{js}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon_{tk}}{\partial x_s} - \frac{\partial \varepsilon_{ts}}{\partial x_k} \right) = 0$$

DEVE SEMPRE
ESSERE
VERIFICATA

EQUAZIONE DI
COMPATIBILITA'

anche, togliendo le parentesi:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_t \partial x_s} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ts}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{js}}{\partial x_t \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{tk}}{\partial x_j \partial x_s}$$

Equazioni di
Beltrami - Saint
Venant

Questa espressione genera 6 equazioni indipendenti
con gli indici con sistemi

J	k	T	S
1	1	2	2
2	2	3	3
3	3	1	1
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	1	2

In conclusione

DATA ε_{ij} (ARBITRARIA) SI PUO' RISALIRE
A UN CAMPO DISPOSTAZIONE u_i SE E
SOLO SE SONO VERIFICATE LE
6 EQUAZIONI DI COMPATIBILITA'

- Dunque per le deformazioni abbiamo a disposizione

$$u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij} \quad \text{e i 2 blocchi di equaz.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{ij} \frac{1}{2} (\dots) \\ \text{eq. compat} \end{array} \right\}$$

- Per quanto riguarda gli spazi invece abbiamo

1^a eq. cinematica

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_j = \rho a_j$$

$$T_{ij} \cdot b_j$$

2^a eq. cinematica

$$T_{ij} = T_{ji}$$

- Per finire questi 2 aspetti, ^{scriviamo} ~~univariati~~ le EQUAZIONI COSTITUTIVE

- manca ancora qualcosa, ovvero una equaz. di bilancio energetico.

EQUAZIONI COSTITUTIVE

sono del tipo $T_{ij} = f(\epsilon_{ij})$

✓ v.b. 7

{ Non consideriamo deformazioni permanenti - NO PLASTICITA' }

6 termini

6 termini

Quando lo sforzo è nullo la deformazione è nulla

{ se $\epsilon = 0, \Rightarrow \sigma = 0$ } e viceversa.

Posso distinguere fra 2 casi

LEGAME LINEARE FRA T ed ϵ

LEGAME NON LINEARE FRA T ed ϵ non li studiamo

Anche se lineare, al numero delle componenti sono 36 costanti, genericamente (indipendenti)

$$T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

• Scautando i 2^o e 3^o cancri

$C_{ijkl} = C_{jikl}$ in quanto T è simmetrico

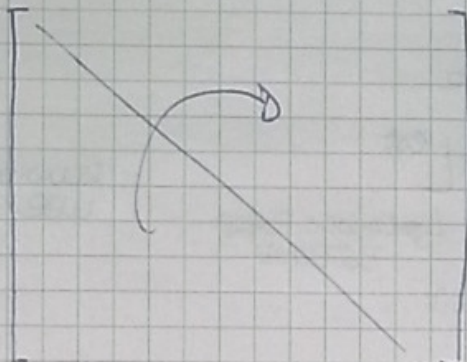
- Scautando k e l nei cancri

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad \text{in quanto}$$

ϵ è simmetrico.

• $C_{ijkl} = C_{klij}$ per ragioni energetiche (vedi + avanti)

La matrice C sono
 dunque
 simmetrica, dunque
 avendo una
 matrice 6×6 ho
 al max 21 cost.
 indipendenti



Il n° delle costanti indipendenti dipende dalla struttura
 del materiale; i cosiddetti reticoli di Bravais

↓
 tutti i possibili reticoli possibili
 se essi si possono disporre
 gli atomi (o ioni cristallini)

La + semplice è
 la TRICLINICA con
 3 assi e 3 angoli
 indipendenti fra loro.

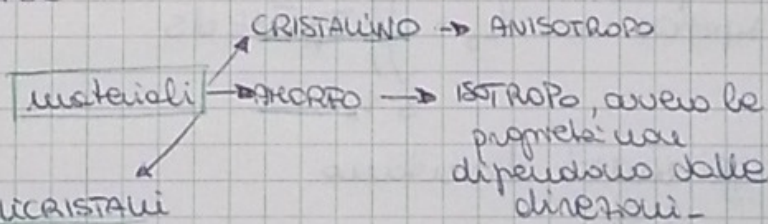
monocivico → $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ angoli uguali} \\ 13 \text{ costanti} \end{array} \right.$

↳ 21 compen.
 elastiche

eccezione

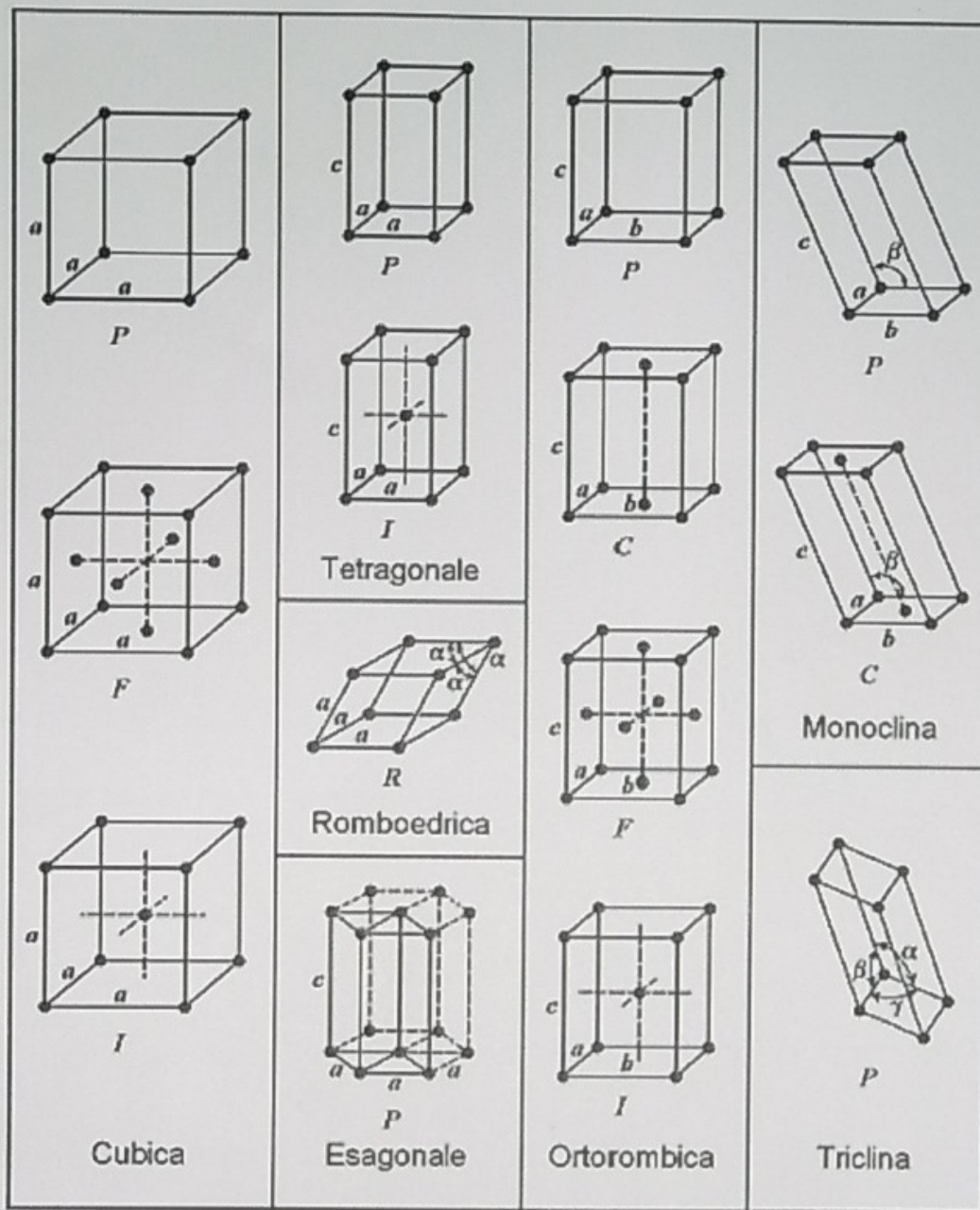
Semplificando la struttura, diminuiscono le costanti elastiche

I materiali che sono
 in applicazioni ingegneristiche
 sono di 2 tipi
 alcuni tipo



bloccetti di cristalli puri
 orientati a caso ogni pezzo
 è orientato a caso. sono molti così
 ISOTROPI

↓
 2 COSTANTI
 ELASTICHE



- Triclinic $\rightarrow$ 21 independent components
- Monoclinic $\rightarrow$ 13 independent components
- Orthorhombic $\rightarrow$ 9 independent components
- Tetragonal (C_4, S_4, C_{4h}) $\rightarrow$ 7 independent components
- Tetragonal ($C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h}$) $\rightarrow$ 6 independent components
- Rhombohedral (C_3, S_6) $\rightarrow$ 7 independent components
- Rhombohedral (C_{3v}, D_3, D_{3d}) $\rightarrow$ 6 independent components
- Hexagonal (transverse isotropy) $\rightarrow$ 5 independent components
- Cubic $\rightarrow$ 3 independent components

BILANCIO ENERGETICO

Avevamo detto che

$$\Delta T + \Delta U = L^{est}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 VARIAT. VARIAT. LAVORO FORTE
 EN. CINETICA EN. POTENZIALE ESTERNE

summande
well continuous

Consideriamo un pezzo
di corpo avente volume V con
superficie S , e applichiamo
il bilancio energetico.

↓
Come F esterno ho $\bar{F}$ di volume $\bar{b}$
e $\bar{F}$ di superficie T_n

$\hookrightarrow \{ \bar{b} \text{ in } V \text{ e } T_n \text{ in } S \}$

$$L = \int_V \bar{F} \bar{t} \, d\epsilon = \int_{t_A}^{t_B} \bar{F} \cdot \bar{V} \, dt$$

$\hookrightarrow$ velocità

lavoro forte
di volume

$$= L_V = \int_V \int_{t_A}^{t_B} \bar{b} \cdot \bar{V} \, dt \, d\epsilon$$

$\hookrightarrow$ volume

lavoro forte
di superficie

$$= L_S = \int_S \int_{t_A}^{t_B} T_n \bar{V} \, dt \, d\sigma$$

Per gli indici diventiamo

$$L_V = \int_V \int_{t_A}^{t_B} b_j V_j \, dt \, d\epsilon$$

$$L_S = \int_S \int_{t_A}^{t_B} (T_{ij} n_j) V_i \, dt \, d\sigma$$

l'integrale di superficie con la divergenza può essere trasformata in un integrale di volume

$$L_s = \iint_{S} \int_{t_A}^{t_B} \bar{T}_{ij} n_j \underline{v}_i dt ds = \iiint_V \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T}_{ij} n_i) dt d\vec{r} =$$

$$= \iiint_V \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{T}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] dt d\vec{r} =$$

$$= \bar{T}_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{T}_{ij} \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial t} = \bar{T}_{ij} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ij} + \rho_{ij}) =$$

$$= \bar{T}_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + \bar{T}_{ij} \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = \left\{ \bar{T}_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right\}$$

scompare nell'integrale e oltre

$$= \iiint_V \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{T}_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right] dt d\vec{r} \quad y$$

il lavoro ottenuto totale sarà $L_s + L_v$

$$L_s + L_v = \iiint_V \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{T}_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] dt d\vec{r} =$$

$$L = \rho \cdot a_i = \int \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

13.881

$$= \int_V \int_{t_A}^{t_B} \left[\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} + T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right] dt dV =$$

1^a PARTE

$$= \int_V \int_{t_A}^{t_B} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} dt dV = \int_V \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{V} \cdot \bar{V}) dt dV = \int_{t_A}^{t_B} T dt =$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)$
 $\hookrightarrow \frac{1}{2} \dot{V}^2$

$= T(t_B - t_A) = \Delta T_{\text{DEVI. CINETICA}}$

Riscrivendo il bilancio

$$\cancel{\Delta T} + \Delta U = \cancel{\Delta T} + \int_V \int_{t_A}^{t_B} T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt dV$$

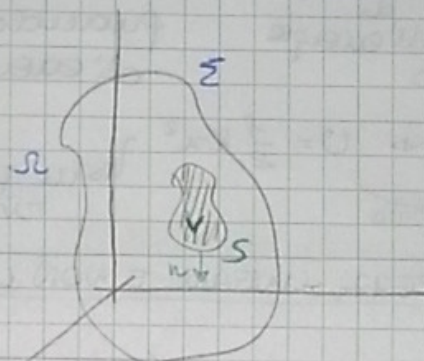
$$\Delta U = \int_V \int_{t_A}^{t_B} T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt dV$$

VARIAZIONE
ENERGIA POTENZIALE
DURANTE LA
DEFORMAZIONE

FISICA DEI MATERIALI E DEI DISPOSITIVI

facemo omitti a definire la variazione ΔU di en. potenziale come:

$$\Delta U = \int_V \int_{t_A}^{t_B} T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt dV$$



[U en. potenziale elastica totale]

Possiamo definire una u = densità di energia per unità di volume

↳ STRAIN ENERGY DENSITY FUNCTION

dunque $U = \int_V u dV$

$$\Delta U = U(t_B) - U(t_A) = \int_V u(t_B) dV - \int_V u(t_A) dV =$$

$$= \int_V \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial u}{\partial t} dt dV$$

dunque possiamo eguagliare le 2 espressioni di ΔU

$$\int_V \int_{t_A}^{t_B} T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt dV = \int_V \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial u}{\partial t} dt dV$$

vale per $\forall t$ e
per $\forall V$, allora
gli integrandi

degli integrali sono
uguali

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

è utile per andare
a scrivere le
relazioni costitutive

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

$$\text{dunque } T_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

↑ FACILIO DERIVATA COMPOSTA.
VISTO CHE PENSO $u = u(\varepsilon_{ij})$

$$[T_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}}]$$

ricorrendo al
andare dall'energia
allo spazio

In generale l'espressione costitutiva
 $T_{ij} = f(\epsilon_{ij})$ risolve in questo modo
facendo ricorrere la densità
di energia elastica u -

$$F = -kx \rightarrow U = \frac{1}{2} kx^2$$

DERIVATO

in questo caso $U = U(x)$, derivando
rispetto ad x ricaviamo la forza.

VALE PERE RETTI LINEARI E NON LINEARI

DENSITA' DI ENERGIA IN UN RETTO LINEARE

Se il mezzo è lineare avrà $T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

Le costanti elastiche devono
essere simmetriche

21 COSTANTI
INDIPENDENTI
(AL MAX)

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \rightarrow \text{demonstriamo questa}$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{klij}$$

Avendo un mezzo lineare,
voglio vedere
quale se mi dà una
relazione lineare

La è una proprietà delle
derivate seconde
(INVERTENDO LE DERIVATE
NON CAMBIA IL RISULTATO)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \quad \text{il mezzo è lineare, dunque}$$

$$T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + C_{klij} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t})$$

USO LA

SIMMETRIA



$$= \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + C_{ijkl} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right) =$$

SONO UGUALI

CAMBIO NOTTE AGLI INDICI DEL 2° ADDENDO (INDICI MISTI)

$$= \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + C_{ijlk} \epsilon_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right) =$$

HO OTTENUTO LA DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$= \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ij} \epsilon_{kl}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \right)$$

quindi, la derivata di energia elastica rispetto
per un mezzo lineare è

$$u = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

ESSENDO UGUALI LE DERIVATE
SONO UGUALI GLI ARGOMENTI
(ENTRambi A RENO DI COSTANTE)

posso anche
scrivere come,
dovendo contare che
 $T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

$$u = \frac{1}{2} T_{ij} \epsilon_{ij}$$

Con particolari

$$u(\epsilon=0) = 0$$

$$u(\epsilon) > 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$\epsilon > 0$ mezzo non
ancora stabilizzato
all'equilibrio

visto ciò, C_{ijkl} è DEFINITO POSITIVO

è responsabile
del fatto di avere > 0

ϵ è adimensionale

T_{ij} è in Pascal $[N/m^2]$

C_{ijkl} è in Pascal

$\rightarrow u$ è dunque in Pascal

$$T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

- TENSORE DI RIGIDITA'
- STIFFNESS TENSOR
- TENSORE DELLE COSTANTI ELASTICHE

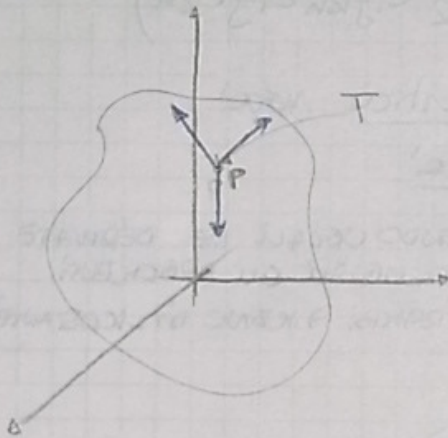
inversamente $\epsilon_{kl} = D_{ijkl} T_{ij}$

- TENS. DI CEEVOLTA'
- COMPLIANCE TENSOR

Andiamo ora a considerare i

MATERIALI ISOTROPICI

Voglio studiare le loro equazioni costitutive (legame $T \leftrightarrow \epsilon$)



- quando ho un tensore simmetrico ho sempre 1sys di riferimento nel quale esso è rappresentato da una matrice diagonale

Nel nostro caso ho T.

Se posso orientare T in un tensore diagonale T^0 avente componenti

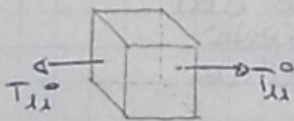
$$T^0 = \begin{bmatrix} T_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^0 \end{bmatrix}$$

stiamo andando a cercare le direzioni principali dello sforzo, cercando i T^0

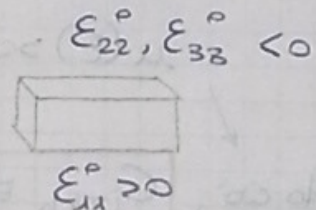
Andiamo ora a vedere come si deforma.

1° STEP

solo $T_{11}^0 \neq 0$



Applicando una trazione ho allungamento e strizione



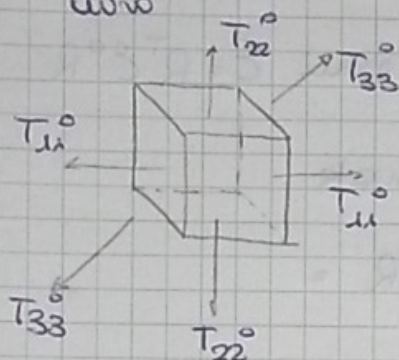
Posso scrivere l'espressione delle deformazioni

$$\begin{cases} \epsilon_{11}^0 = \frac{1}{E} T_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 = -\frac{\nu}{E} T_{11}^0 \\ \epsilon_{33}^0 = -\frac{\nu}{E} T_{11}^0 \end{cases}$$

E → modulo di YOUNG

ν → modulo di POISSON

Se consideriamo di avere tutti e 3 i possibili spinti
avanti



$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{11}^0 &= \frac{1}{E} T_{11}^0 - \frac{\nu}{E} T_{22}^0 - \frac{\nu}{E} T_{33}^0 \\ \epsilon_{22}^0 &= -\frac{\nu}{E} T_{11}^0 + \frac{1}{E} T_{22}^0 - \frac{\nu}{E} T_{33}^0 \\ \epsilon_{33}^0 &= -\frac{\nu}{E} T_{11}^0 - \frac{\nu}{E} T_{22}^0 + \frac{1}{E} T_{33}^0 \end{aligned} \right.$$

cerchiamo di scrivere in modo + compatto, facendo
comporre $tr(T)$ in forma matriciale diagonale

$$\epsilon_{11}^0 = \frac{1}{E} T_{11}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0) + \frac{\nu}{E} T_{11}^0$$

$$\epsilon_{22}^0 = \frac{1}{E} T_{22}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0) + \frac{\nu}{E} T_{22}^0$$

1° esempio
di un bel sistema

$$\epsilon_{33}^0 = \frac{1}{E} T_{33}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0) + \frac{\nu}{E} T_{33}^0$$

$$\epsilon_{11}^0 = \frac{1+\nu}{E} T_{11}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0)$$

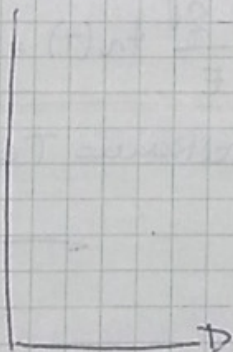
come matrici ottemo

$$\epsilon_{22}^0 = \frac{1+\nu}{E} T_{22}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0)$$

$$\epsilon_{33}^0 = \frac{1+\nu}{E} T_{33}^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0)$$

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E} T^0 - \frac{\nu}{E} tr(T^0) I$$

ora dobbiamo tornare al sys di riferimento iniziale



Per passare da una base all'altra dovrai fare

$$T = R^T T^0 R, \text{ per le deformazioni } \varepsilon = R^T \varepsilon^0 R$$

in questa sostituisco le ε^0 appena trovate

$$\varepsilon = R^T \varepsilon^0 R = R^T \left[\frac{1+\nu}{E} T^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr}(T^0) I \right] R =$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \underbrace{R^T T^0 R}_T - \frac{\nu}{E} \underbrace{\text{tr}(T^0)}_{\text{tr}(T)} \underbrace{R^T I R}_{I} \rightarrow I \text{ (R è diagonale, } R^T = R^{-1})$$

$$\text{tr}(T) = \text{tr}(R^T T^0 R) = \text{tr}(R^T R T^0) = \text{tr}(T^0)$$

↳ vale $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

da cui

$$\varepsilon = f(T) \quad \boxed{\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(T) I}$$

RELATIONE COSTITUTIVA
PER TESSILI LINEARI
ISOTROPICI (1ª forma)

oltre a ν ed E posso usare λ e μ (coeff. di Lamé) e anche k (modulo di rigidezza)
 μ modulo di taglio
 ↳ SHEAR MODULUS
 k BULK MODULUS

Analizziamo a ritroso la formula trovata $T = f(\varepsilon)$

• Calcoliamo la traccia a dx e sy

$$\text{tr}(\varepsilon) = \frac{1+\nu}{E} \text{tr}(T) - 3 \frac{\nu}{E} \text{tr}(T) =$$

$$= \frac{1}{E} \text{tr}(T) (1+\nu - 3\nu) = \boxed{\frac{1-2\nu}{E} \text{tr}(T) = \text{tr}(\varepsilon)}$$

prendiamo la rel. iniziale e explicitiamo T a sx

$$T = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{E} \text{tr}(\varepsilon) I$$

ma, da quello che ho appena ricavato, $tr(T) = \frac{E}{1-2\nu} tr(\epsilon)$
e dunque

$$T = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{E}{1-2\nu} tr(\epsilon) I \quad \text{da cui}$$

$$T = \frac{E}{1+\nu} \epsilon + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} tr(\epsilon) I$$

$\rightarrow 2\mu$ (anche $2G$) $\rightarrow \lambda$

RELATIONE INVERSA

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad N/m^2$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad N/m^2$$

dunque

$$T = 2\mu \epsilon + \lambda tr(\epsilon) I \quad \text{forma equivalente}$$

Facciamo ora alcune considerazioni.

COME DIVENTA L'EQ DELL'ENERGIA X IMPIAZZ. ISOTROPICI?

• DENSITA' DI ENERGIA

avevamo detto che $U = \frac{1}{2} T_{ij} \epsilon_{ij}$

la T l'ho appena ricavata e con gli indici non

$$U = \frac{1}{2} (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}) \epsilon_{ij} =$$

$$T_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{da cui}$$

$$= \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk} \epsilon_{jj}$$

$$= \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk} \epsilon_{jj} =$$

$$= \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk} \epsilon_{jj} =$$

$\rightarrow$ lo possiamo scrivere come $\epsilon_{ij} \epsilon_{ji}$

un generico C_{kk} del prodotto $C=AB$ sarà

$$C_{kk} = A_{ki} B_{ik} = \text{tr}(C) \quad \text{da cui} \quad \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \text{tr}(\varepsilon^2)$$

e ottengo

$$\mu = \mu \text{tr}(\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \lambda [\text{tr}(\varepsilon)]^2$$

Cerchiamo ora le formule inverse di ν ed ε a partire da λ e μ

$$\lambda = \frac{2\varepsilon}{(1+\nu)(1+2\nu)} \quad \mu = \frac{\varepsilon}{(1+\nu)2}$$

da cui ~~$(1+2\nu)\lambda = 2\mu$~~ $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1+2\nu}$

dunque

$$(1+2\nu)\lambda = 2\mu\nu$$

$$\lambda = 2\mu\nu - 2\nu\lambda = 2\nu(\mu + \lambda) \quad \text{da cui} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

dalla 1^a si ha anche

$$\varepsilon = \mu(1+\nu)2 = 2\mu\left(1 + \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}\right) =$$

$$= 2\mu \frac{2(\mu + \lambda) + \lambda}{2(\mu + \lambda)} \Rightarrow \varepsilon = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$