Lez. 1

(1.1)

FISICA DEI MATERIALI

Giordano
stefano.giordano@dsf.unica.it

APPUNTI + | Colombo - Giordano
↓ | Introduzione alla teoria della elasticità
BASTA x ESAME | SPRINGER 2007

- o anche LOVE
- o LANDAU
- o ATKIN-FOX → + divulgativo

} x es. approf.

SOLO ORALE

1ª PARTE

Richiami di matematica

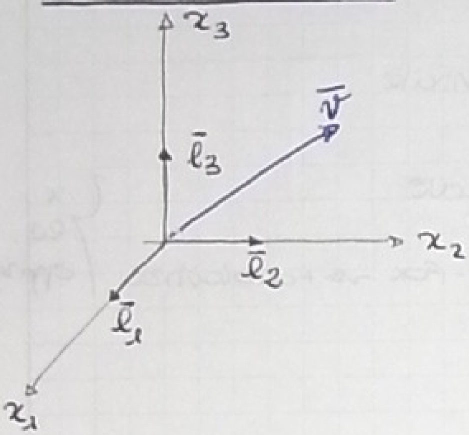
- CALCOLO VETTORIALE
  - ↳ NORMA
  - PROD SCALARE
  - ROTAZIONI
  - PROD. VETTORIALE
- CALCOLO INTEGRALE
  - ↳ LINEE
  - INT. CURVILINEI
  - SUPERFICI
  - INT. ~~...~~ DI SUPERFICI
  - TEO. DIVERGENZA
  - TEO ROTAZIONE
- APPLICAZIONI LINEARI
  - ↳ POLIN. CARATTERISTICO
  - TRACCIA
- CALCOLO DIFFERENZIALE
  - ↳ GRADIENTE
  - ROTORE
  - DIVERGENZA

2ª PARTE

Meccanica di un sys di punti materiali

- eq. cons. q. moto
- eq. cons. mom. q. moto
- eq. energia

CALCOLO VETTORIALE



Basi d. 3 versori formanti la base del sys di riferimento.

Posso esprimere $\bar{v}$ come le varie componenti

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3 = v_j\bar{e}_j$$

convenzione degli indici ripetuti ← 2 indici uguali indicano sommatoria

$$\to v_j e_j = \sum_{j=1}^{3} v_j \bar{e}_j$$

Indichiamo con

$V_2 = \{$spazio dei vett nel piano$\}$

$V_3 = \{$spazio dei vett. nello spazio$\}$

$v_j \to$ coord. del vettore

$e_j \to$ elem. della base

- NORMA VETTORIALE

→ sostanz. è la lungh. del vettore

↓ norma $= \|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{v_j v_j}$

→ uguale con not. precedente

3 proprietà

1) definitezza positiva

→ $\|\bar{v}\| \geq 0$, $\|\bar{v}\| = \emptyset \Leftrightarrow \bar{v} = \emptyset$

2) disuguaglianza triangolare

→ $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$

3) $\|\alpha\bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$

- PRODOTTO SCALARE

$\bar{v} \cdot \bar{w} = \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \cdot \cos\theta$ dove θ = ang. compreso fra i 2 vettori

1) SIMMETRICO

$\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

2) definitezza positiva

$$\bar v\cdot\bar v \geq 0, \quad = 0 \iff \bar v = \emptyset$$

3) linearità

$$\left(\alpha\bar v+\beta\bar w\right)\cdot\bar a = \alpha\,\bar v\cdot\bar a+\beta\,\bar w\,\bar a$$

4) $\|\bar v\| = \sqrt{\bar v\cdot\bar v}$

andiamo a dimostrare perchè

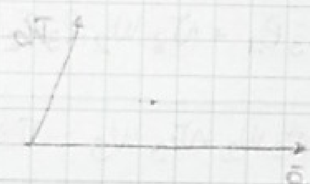
linearità → omogeneità $\rightarrow (\alpha\bar v)\cdot\bar a = \alpha\,\bar v\cdot\bar a$

linearità → additività $\rightarrow (\bar v+\bar w)\cdot\bar a = \bar v\cdot\bar a+\bar w\cdot\bar a$

prendiamo la 1^, omogeneità

$$(\alpha\bar v)\cdot\bar a = \|\alpha\bar v\|\cdot\|\bar a\|\cos\theta_{\alpha\bar v,\bar a} =$$

$$= |\alpha|\,\|\bar v\|\cdot\|\bar a\|\cos\theta_{\alpha\bar v,\bar a} =$$



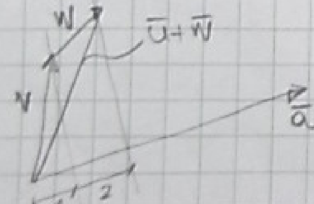
se α è positivo, non ho problemi

se α è negativo, devo fare attenzione che cambia l'angolo. Da cui $\cos\theta_{\alpha\bar v,\bar a} = \text{sign}\,\alpha\cdot\cos\theta_{\bar v,\bar a}$

e riscrivendo avrò

$$= \cancel{\text{sign}}\,\underbrace{|\alpha|\,\text{sign}\,\alpha}_{\alpha}\cdot\underbrace{\|\bar v\|\cdot\|\bar a\|\cos\theta_{\bar v,\bar a}}_{\bar v\cdot\bar a} = \alpha\,\bar v\cdot\bar a$$

Additività



Deriva dal fatto che vado a considerare le proiezioni, dunque la proiez. somma = somma delle proiezioni

$1 = v\cos\theta_{\bar v,\bar a}$

$2 = w\cos\theta_{\bar w,\bar a}$

$1+2 = (u+w)\cos\theta_{\bar u+\bar w,\bar a}$

~~da cui, per la bilinearità ecco che~~

Date le coordinate, come calcolo il prod. scalare?

$$\left.\begin{array}{l}\bar{v} = v_j \bar{e}_j \\ \bar{w} = w_i \bar{e}_i\end{array}\right] \to \bar{v}\cdot\bar{w} = (v_j \bar{e}_j)\cdot(w_i \bar{e}_i) :$$ usiamo la linearità

$$= v_j w_i \underbrace{(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i)}_{\delta_{ij}}$$ quanto vale il prod. fra 2 versori?

~~dunque~~ vale

simbolo di Kronecker

$$\delta_{ij} \begin{cases} =1 & i=j \\ =\phi & i\neq j\end{cases}$$

e posso scrivere

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = v_j w_i \delta_{ij} = v_j w_j$$ salvo l'indice i

ottengo questo perchè se $i\neq j$ vanno a zero dunque mi rimangono solo quelli con uguale indice.

intero sarebbe

$$v_1 w_1 \cancel{e_1 e_1}^{1} + \cancel{v_1 w_2 e_1 e_2} + \cancel{v_1 w_3 e_1 e_3} + \cancel{v_2 w_1 e_2 e_1} + v_2 w_2 \cancel{e_2 e_2}^{1} + \cancel{v_2 w_3 e_2 e_3} + \cancel{v_3 w_1 e_3 e_1} + \cancel{v_3 w_2 e_3 e_2} + v_3 w_3 \cancel{e_3 e_3}^{1} =$$

$$= \boxed{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \bar{v}\cdot\bar{w} = v_j w_j}$$ V.I.

ricorda

$$a_k \delta_{kj} = a_j$$

È utile in particolare perchè:

$\bar{u} = u_k \bar{e}_k$ come calcoliamo le coordinate

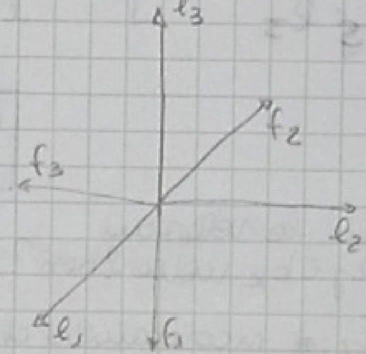
moltiplichiamo a dx e sx per un'altro versore della st. base

$$\bar{u}\,\bar{e}_j = u_k \underbrace{\bar{e}_j \bar{e}_k} = u_k \delta_{jk} = \boxed{u_j = \bar{u}\,\bar{e}_j}$$ V.I.

ROTAZIONI

- Non sempre uso una base univoca, spesso mi capita di usarne + di 1.

Prendiamo una terna ortonormale $\bar e_1, \bar e_2, e_3$ rispetto alla quale un vett $\bar u$ può essere scritto come $\bar u = a_j \bar e_j$



Se una altra terna ortonorm viene in un'altra posizione, posso scrivere u come

$\bar u = b_k \bar e_k$

↓

COME SONO LEGATI?

Posso scrivere $\bar f_1 = R_{is} \bar e_s$ ① con $s = 1, 2, 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 \Rightarrow R_{11}, R_{12}, R_{13} \\ f_2 \Rightarrow R_{21}, R_{22}, R_{23} \\ f_3 \Rightarrow R_{31}, R_{32}, R_{33} \end{array}} \to \text{matrice } R_{is}$$

Consideriamo di moltiplicare per $\bar f_j$

$$\underbrace{\bar f_j \cdot \bar f_i}_{\downarrow} = R_{is} \cdot \bar e_s \cdot \bar f_j$$

$$\underbrace{\delta_{ij}}_{I} = R_{is} \cdot \underbrace{\bar e_s \cdot \bar f_j}_{(R^{-1})_{sj}} \qquad I = R \cdot R^{-1}$$

dunque $\boxed{(R^{-1})_{sj} = \bar e_s \bar f_j}$

altrimenti posso fare un'altra cosa:

Scriviamo la relaz. inversa della ① con due indi.

$\bar e_t = (R^{-1})_{tq} \bar f_q$ molt. x versore $\bar e_r$

$$\bar e_r \bar e_t = (R^{-1})_{tq} \boxed{\bar f_q \bar e_r} \to \boxed{(R)_{qr} = f_q e_r} \to$$

↳ $\delta_{rt} = I$ (come prima)

Riscriviamole con gli stessi indici

$$(R^{-1})_{sj} = \bar{e}_s \cdot \bar{f}_j$$
$$R_{sj} = \bar{f}_j \cdot \bar{e}_j$$

→ equivale a dire che $R^{-1} = R^T$, ovvero l'inverso è uguale alla trasposta,

$\boxed{\text{LA MATRICE DI ROTAZIONE È ORTOGONALE SEMPRE}}$ V.I.

Ora, quali sono le relazioni fra i coeff. a_j e b_k nelle 2 basi?

↳ $\bar{u} = a_j \bar{e}_j$ ricordando che $\bar{e}_j = (R^{-1})_{jq} \bar{f}_q$ ottengo

$$= \underbrace{a_j (R^{-1})_{jq}}_{b_q} \bar{f}_q \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_q = (R^{-1})_{jq} a_j \\ a_s = R_{st} b_t \end{array}} = R_{qj} a_j \quad R^{-1}_{ab} = R^T_{ab} = R_{ba}$$

- Dimostriamo la disuguaglianza triangolare

↳ vediamo prima un'altra disuguaglianza

DIS. di CAUCHY-SHWARTZ

dati 2 vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$, prendiamo $f(\lambda) = (\lambda \bar{v} + \bar{w}) \cdot (\lambda \bar{v} + \bar{w}) =$

$$= \lambda^2 \bar{v} \cdot \bar{v} + \lambda \bar{v} \cdot \bar{w} + \lambda \bar{w} \cdot \bar{v} + \bar{w} \cdot \bar{w} =$$

$$= \lambda^2 \bar{v} \cdot \bar{v} + 2\lambda \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{w} \geq 0$$ è un pol. 2° grado in λ

Ha tutti coeff. ~~positivi~~ (negativi) solo quando ho Δ negativo

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$b = 2\bar{v} \cdot \bar{w}$

$a = \bar{v} \cdot \bar{v}$

$c = \bar{w} \cdot \bar{w}$

ottengo $4(\bar{v} \cdot \bar{w})^2 - 4(\bar{v} \cdot \bar{v})(\bar{w} \cdot \bar{w}) < 0$

$$(\bar{v} \cdot \bar{w})^2 \leq \|\bar{v}\|^2 \cdot \|\bar{w}\|^2$$

$$\boxed{|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$$ DIS. CAUCHY-SHWARTZ

Comunque, possiamo dimostr. la disuguaglianza triangolare.

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v})(\bar{u}+\bar{v}) =$$

$$= \bar{u}\cdot\bar{u} + 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v} =$$

$$= \|\bar{u}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$$

$\rightarrow$ è un numero, pos o neg, che è sicuramente < del suo modulo

$$\leq \|\bar{u}\|^2 + 2|\bar{u}|\cdot|\bar{v}| + \|\bar{v}\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2 = (\|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|)^2$$

e abb. ottenuto la diseg triangolare

$$\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$$

ok

PRODOTTO VETTORIALE

Da 2 vettori vado a 1 vettore

$\bar{v}\wedge\bar{w} \rightarrow$ vettore che ha 3 prop. fondamentali

1) NORMA $\|\bar{v}\wedge\bar{w}\| = \|\bar{v}\|\cdot\|\bar{w}\|\cdot \sin\vartheta_{\bar{v},\bar{w}}$

2) DIREZ. perpendicolare al piano di $\bar{v}$ e $\bar{w}$

3) verso regola della mano destra

Andiamo a vedere le proprietà del prod. vettoriale e come ricavo le componenti del vettore risultante

PROPRIETA'

- ANTISIMMETRIA

$$\bar{v}\wedge\bar{w} = -\bar{w}\wedge\bar{v}$$

- LINEARITA'

$$(\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})\wedge\bar{a} =$$
$$\alpha\,\bar{v}\wedge\bar{a} + \beta\,\bar{w}\wedge\bar{a}$$

in componenti avrò

$$\left.\begin{array}{l}\bar{v} = v_J\,\bar{e}_J \\ w = w_k\,\bar{e}_k\end{array}\right\} \text{x linearità} \quad \bar{v}\wedge\bar{w} = (v_J e_J)\wedge(w_k e_k) =$$

$$= v_J w_k\,(\bar{e}_J\wedge\bar{e}_k) \rightarrow$$

$\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \qquad \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_1 = -\bar{e}_3$

$\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \qquad \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_2 = -\bar{e}_1$

$\bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \qquad \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_3 = -\bar{e}_2$

$$\bar{e}_i \wedge \bar{e}_i = \bar{0}$$

introduco il simbolo di Permutazione di Levi-Civita

$$\boxed{\bar{e}_j \wedge \bar{e}_k = \varepsilon_{sjk}\, e_s}$$

$$\varepsilon_{sjk} = \begin{cases} +1 \text{ se } (s,j,k) \text{ sono una permutazione pari di } (1,2,3) \\ -1 \text{ se } (s\,j\,k) \text{ sono una permutaz. dispari di } (1\,2\,3) \\ \emptyset \text{ se c'è una ripetizione} \end{cases}$$

<u>Permutaz pari</u> Es. ho 312. Per arrivare a 123 devo fare

$3\,1\,2 \to 3\,2\,1 \to 1\,2\,3$ 2 scambi

dispari analogo

$2\,1\,3 \to 1\,2\,3$ dispari

$$\varepsilon_{312} \Rightarrow e_1 \wedge e_2 = \varepsilon_{312}\, \bar{e}_3$$

Continua ripasso matematico -

Prod. vettoriale (continua)

$$\bar u \wedge \bar v = (u_j \bar e_j)\wedge(v_k \bar e_k) = u_j v_k \, \bar e_j \wedge \bar e_k$$

$\bar e_j \wedge \bar e_k = \varepsilon_{qjk} \bar e_q$ detto ciò posso scrivere

$$\bar u \wedge \bar v = \underbrace{u_j v_k \varepsilon_{qjk}}_{\text{compon. lungo } q} \underbrace{\bar e_q}_{\text{versore lungo } q}$$

scrivendo tutto esplicitamente avrò

$$\bar u \wedge \bar v = (u_1 \bar e_1 + u_2 \bar e_2 + u_3 \bar e_3) \wedge (v_1 \bar e_1 + v_2 \bar e_2 + v_3 \bar e_3) =$$

$$= \cancel{u_1 v_1 \bar e_1 \wedge \bar e_1}^{\,0} + u_1 v_2 \bar e_1 \wedge \bar e_2 + u_1 v_3 \bar e_1 \wedge \bar e_3 +$$
$$+ u_2 v_1 \bar e_2 \wedge \bar e_1 + \cancel{u_2 v_2 \bar e_2 \wedge \bar e_2}^{\,0} + u_2 v_3 \bar e_2 \wedge \bar e_3 +$$
$$+ u_3 v_1 \bar e_3 \wedge \bar e_1 + u_3 v_2 \bar e_3 \wedge \bar e_2 + \cancel{u_3 v_3 \bar e_3 \wedge \bar e_3}^{\,0} =$$

$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\bar e_3 + (-u_1 v_3 + u_3 v_1)\bar e_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)\bar e_1 =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

se provi a calcolare il determinante vedi che torna -

Posso fare il conto del prod. misto

$$\vec a \cdot \vec u \wedge \vec v = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

si riduce al calcolo del determinante della matrice di tutti numeri -

$\downarrow$

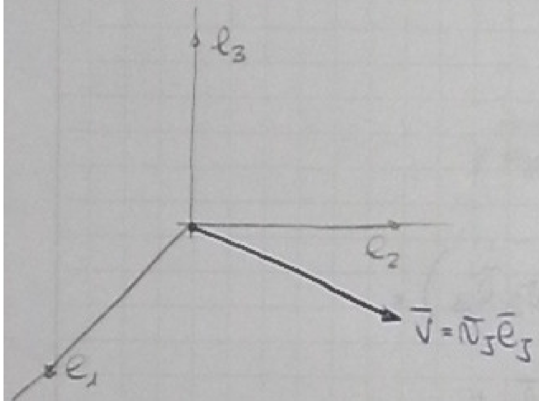
posso invertire le operaz. e il det non cambia $\quad \vec a \cdot \bar u \wedge \bar v = \vec a \wedge \vec u \cdot \vec v$

$$\varepsilon_{qJk}\,\varepsilon_{qst} = \delta_{Js}\,\delta_{kt} - \delta_{Jt}\,\delta_{ks}$$

APPLICAZ. LINEARI o TENSORI

$\varphi : V_3 \longrightarrow V_3$ vado da un vettore in V_3 ad un altro vettore V_3.

Prendo una base ortonormale



Voglio calcolare una $\varphi(\vec{v})$ dove φ è un operatore lineare, ovvero

$$\varphi(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha\varphi(\vec{v}) + \beta\varphi(\vec{w})$$

da cui $\varphi(\vec{v}) = \varphi(v_J \bar{e}_J) = v_J\,\varphi(\bar{e}_J)$ che mi indica come agisce sulla base

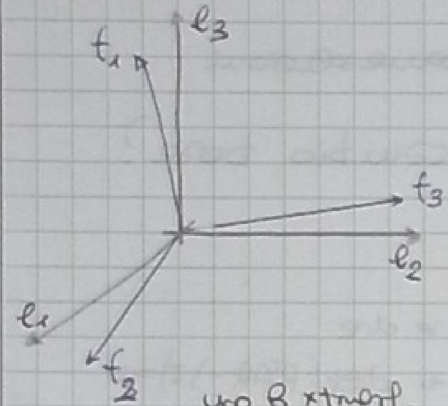
Posso scrivere un vettore $\vec{v} = (\vec{v}\cdot\bar{e}_J)\,\bar{e}_J$, da cui sviluppo $\varphi(\bar{e}_J)$ nella base

ovvero $$\underbrace{v_J\left[\varphi(\vec{e}_J)\,\vec{e}_i\right]\vec{e}_i}_{\text{comp di }\varphi(v)\text{ i-esima nella base}} \Rightarrow \left[\varphi(\vec{v})\right]_i = \underbrace{\left[\vec{e}_i\cdot\varphi(\bar{e}_J)\right]}_{\text{matrice } A_{iJ} = \vec{e}_i\cdot\varphi(\bar{e}_J)} v_J$$

nella mecc. ne ho 2 fondam.

- T_{ij} → TENSORE D. STRESS
- ε_{ij} ⇒ TENSORE D. DEFORMAZIONI

Quale relaz. c'è fra 2 tensori se ho 2 diverse basi?



$f_i = R_{ij} \bar{e}_j$ $\qquad R^{-1} = R^T$ matrice rotazione.

$\bar{v}_g = a_j \bar{e}_j = b_k \bar{f}_k \qquad a_s = R_{st} b_t$

$$\varphi(\vec{v}) = \underbrace{\left[\bar{e}_i \cdot \varphi(\bar{e}_j)\right]}_{A_{ij}} v_j \bar{e}_i = A_{ij} v_j \bar{e}_i$$

$v_j e_j = w_k \bar{f}_k$

uso R x trasf. i vettori e poi per le componenti

$$= A_{ij} R_{js} w_s (R^{-1})_{iq} f_q =$$

$$= \left[R_{qi} A_{ij} R_{js}\right] w_s \vec{f}_q$$

$$\Downarrow$$

$$B_{qs} \qquad B = R^T A R$$

Tensore espresso nel sistema f. matrice A nel sys f.

<u>AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UN TENSORE</u>

Ho un certo tensore $\varphi(\bar{v})$ = Voglio vedere se esiste una applicaz. φ tale che $\varphi(\bar{v})$ generi un vettore $\lambda \bar{v}$ che sia quindi $\parallel$ a $\vec{v}$ ma di lungh. diversa.

$\bar{v}$ $\varphi(\bar{v})$

un autovettore è un particolare $\bar{v}$ tale che $\varphi(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$, e il fatt. di amplificazione è detto autovalore di quell'autovettore

→ Come calcolarli?

$\varphi(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ Prendiamo una base $e_1 e_2 e_3$, $\varphi(v)$ diventa

$$A_{ij} v_j = \lambda v_i$$

$A v = \lambda v \qquad (A - \lambda I) v = 0$ → è un sistema omogeneo, che ha soluz≠ banale se det[coeff] ≠ 0

$$\det[A - \lambda I] \neq 0$$

Dunque devo imporre

$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$ per ricavare gli autovalori di come soluzioni del polinomio-

$\downarrow$

polinomio caratt. del tensore φ

Se cambio base?

$\downarrow$

in un'altra base so che

le stesse soluzioni $\leftarrow$ $B = R^T A R \rightarrow \det(R^T A R - \lambda I) = 0$

$$R^{T} A R - \lambda I = R^{-1} A R - \lambda R^{-1} R = R^{-1}(A-\lambda I) R$$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ sempre, dunque

$\cancel{\det(R^{-1})} \det(A-\lambda I) \det(R) = 0$ ma $\det(R) = \dfrac{1}{\det(R^{-1})}$

$\hookrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

CAMBIANDO BASE
NON CAMBIANO
GLI AUTOVALORI

Esempio in V_2

$$\det(A-\lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21} a_{12} =$$

$$= \underbrace{a_{11} a_{22} - \lambda a_{22} - \lambda a_{11} + \lambda^2 - a_{21} \cdot a_{12}}_{\det(A)}$$

$a_{11}+a_{22}$ = TRACCIA $\operatorname{tr}(A)$

da cui

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A)}$$

$\operatorname{tr}(A)$ e $\det(A)$ non dipendono dalla base che uso (valore costante)

$\det(A)$, $\operatorname{tr}(A)$
INVAR. DEL TENSORE

Teorema di Cayley-Hamilton

Se prendiamo la matrice A da cui siamo partiti e la metto nel pol. caratt. al posto di λ il ~~[illegible]~~ polinomio è sempre nullo → è ovvio, mi serve a trovare un legame fra traccia e determinante

$$V_2^2 \to A^2 - A\,tr(A) + I\det(A) = 0$$

↳ xké è un'equaz. fra matrici

Calcoliamone le traccia → $tr(I) = 2$ (in V_2)

$$tr(A^2) - tr(A)\cdot tr(A) + 2\det(A) = 0$$

da cui

$$\boxed{\det(A) = \frac{[tr(A)]^2 - tr(A^2)}{2}}$$

generalizzabile anche per grado n

in V_2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ x casa

in V_3 → $\det(A - \lambda I) = \det\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{matrix}\right] =$

$$= \cancel{de}\ \cancel{a_{11}}(a_{11}-\lambda)\left[(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - (a_{32} - a_{23})\right] -$$

$$- a_{21}\left[a_{12}(a_{33}-\lambda) - (a_{32}\cdot a_{13})\right] + a_{31}\left[a_{12}a_{23} - (a_{22}-\lambda)a_{13}\right] =$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - (a_{11}-\lambda)(a_{32}-a_{23}) - a_{21}a_{12}(a_{33}-\lambda) +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}(a_{22}-\lambda) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - \lambda a_{22} - \lambda a_{11} + \lambda^2)(a_{33}-\lambda) - a_{11}a_{32} + a_{11}a_{23} + \lambda a_{32} - \lambda a_{23} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} + \lambda a_{21}a_{12} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{13}a_{22} +$$

$$+ \lambda a_{31}a_{13} =$$

2.6

$a_{11}a_{22}a_{33} - \lambda a_{22}a_{33} - \lambda a_{11}a_{22} + \lambda^2 a_{22} - \lambda a_{33}a_{11} + \lambda^2 a_{33} + \lambda^2 a_{11} - \lambda^3 +$
$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} +$
$\lambda a_{13}a_{31} + \lambda a_{12}a_{21} + \lambda a_{23}a_{32} = 0$

$$\det(A) - \lambda^3 + \lambda^2 tr(A) + \lambda(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})$$

cosa è π ciò?

$$(tr A)^2 = (a_{11}+a_{22}+a_{33})^2$$

consideriamo la $tr(A^2)$

la $diag(A^2) = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}$; $a_{12}a_{21} + a_{22}^2 + a_{23}a_{32}$;
$a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2$

da cui

$$tr(A^2) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{23}a_{32} + 2a_{31}a_{13}$$

proviamo a fare $[tr(A^2)] - (tr(A))^2 = 2(\dots)$, dunque posso sostituire alla parentesi di prima $(tr A)^2 - [tr(A^2)]$ ovvero

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 tr(A) + \lambda \frac{tr(A^2) - (tr A)^2}{2} + \det(A)}$$

verifichiamo con Cayley Hamilton

$$-A^3 + A^2 tr(A) + A\frac{tr(A^2) - (tr A)^2}{2} + I\det(A)$$

$tr(I)_{3\times3} = 3$

$$0 = -tr(A^3) + tr(A^2)tr(A) + tr(A)\frac{tr(A^2) - (tr A)^2}{2} + 3\det(A)$$

dividiamo tt per 3 e ottengo

$$\det(A) = \frac{1}{3}tr(A^3) - \frac{1}{3}tr(A^2)tr(A) - \frac{1}{6}tr(A^2)tr(A) + \frac{1}{6}[tr(A)]^3 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}tr(A^3) - \frac{1}{2}tr(A^2)tr(A) + \frac{1}{6}(tr A)^3 = \det(A)}$$

FRACASSO

FISICA DEI MAT. E DEI DISP.

2.1

OPERATORI DIFF.LI

• GRADIENTE $f \rightarrow \bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\bar{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\bar{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i$

$f(x_1, x_2, x_3) = f$

Se ho come elem. di partenza un campo vettoriale anziché una f. scalare, avrò

$\vec{V}(x_1,x_2,x_3) = V_1(x_1,x_2,x_3)\bar{e}_1 + V_2(x_1,x_2,x_3)\bar{e}_2 + V_3(x_1,x_2,x_3)\bar{e}_3 =$

$= V_i(x_1,x_2,x_3)\bar{e}_i$ Ho 9 derivate parziali

Ho le comb. particolarm. importanti : 1) DIVERGENZA $\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$

$= \frac{\partial V_k}{\partial x_k}$

2) ROTORE $\bar{\nabla}\wedge\bar{V}$ posso scriverlo in vari modi avendo un prod vett

1° modo

$$\bar{\nabla}\wedge\bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \bar{e}_1\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right) + \bar{e}_2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)$$

$$+ \bar{e}_3\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$$ diff. di der. parz. incrociate

2° modo (Levi-Civita)

per il prod. vett. ricordo $\bar{a}\wedge\bar{b} = \varepsilon_{kij}\, a_i b_j \vec{e}_k$

$\bar{\nabla}\wedge\bar{V} = \varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}V_j\vec{e}_k$

• Posso anche applicare questi operatori ad elem. già derivati

Lo Prendiamo la divergenza del gradiente

$\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$ LAPLACIANO $\rightsquigarrow \nabla^2 f$

Rotore del gradiente

$\boxed{\bar{\nabla}\wedge\bar{\nabla}f = \emptyset}$ da tenere per buono

Della divergenza, essendo uno scalare, posso fare solo il Gradiente

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})}$$

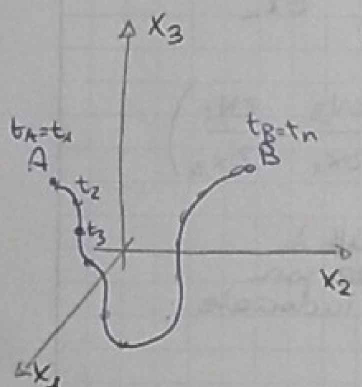
Prendendo un rotore, ex un vettore, posso fare [DIVERGENZA, ROTORE

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\wedge\bar{V}) = 0}$$

DIV ROT

$$\boxed{\bar{\nabla}\wedge(\bar{\nabla}\wedge\bar{V})}$$ non ha part. proprietà, tranne che si può scrivere come $\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}) - \nabla^2 V}$

LINEE



Può essere rappresentata in forma parametrica

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ x_3 = x_3(t) \end{cases} \qquad t_A \le t \le t_B \qquad \bar{x} = \bar{x}(t)$$

Come calcolo la lunghezza?

Dividiamola in tanti punti

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\| \bar{x}(t_{i+1}) - \bar{x}(t_i) \|}{\Delta t} \Delta t$$

FORM. APPROX.

immag. di prendere i vari punti equidistanti - Dividiamo e moltiplico per Δt e faccio lim per $\Delta t \to 0$

da cui

$$\boxed{L = \int_{t_A}^{t_B} \left\| \frac{d\bar{x}}{dt} \right\| dt}$$ FORMULA ESATTA

se ho x e y della circonf

$x = R\cos t$

$y = R\sin t$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

INTEGR. LINEA D. FUNZ. SCALARE

$$\left[\int_{\gamma} f \, dl = \int_{t_A}^{t_B} f\left[\bar{x}(t)\right] \left\| \frac{d\bar{x}}{dt} \right\| dt\right]$$

γ → come linea

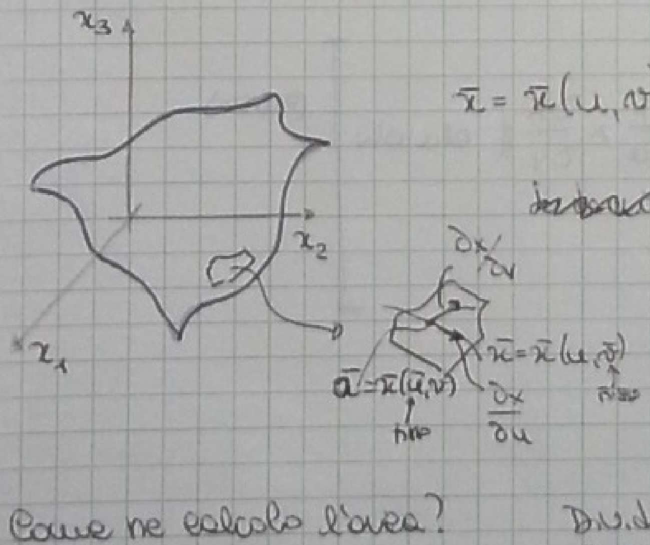
VERSORE TANGENTE ALLA LINEA

$$\left[\vec{t} = \frac{\frac{d\bar{x}}{dt}}{\left\| \frac{d\bar{x}}{dt} \right\|}\right]$$

INTEGR. LINEA DI UN CAMPO VETTORIALE

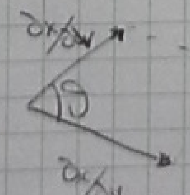
$$\left[\int_{\gamma} \bar{V} \cdot \bar{t} \, dl = \int_{t_A}^{t_B} \vec{V}\left(\bar{x}(t)\right) \cdot \vec{t} \left\| \frac{d\bar{x}}{dt} \right\| dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{V}\left(\bar{x}(t)\right) \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \, dt\right]$$

SUPERFICI



$\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ Dipende da 2 parametri

Come ne calcolo l'area?



Divido la sup. in //grammi la cui area tot è la Σ dei //grammi

→ Area di 1 parallelogramma

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial v} \right\| \sin\vartheta = \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\|$$

$$A_{TOT} = \iint_{(u,v)} \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

es. area sup. sfera

$$\begin{cases} x_1 = R \sin v \cos u \\ x_2 = R \sin v \sin u \\ x_3 = R \cos v \\ u \in (0, 2\pi) \\ v \in (0, \pi) \end{cases}$$

INT. SUP. DI UN CAMPO SCALARE (di f)

$$\int_{\Sigma} f\,ds = \iint_{(u,v)} f(\bar{x}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

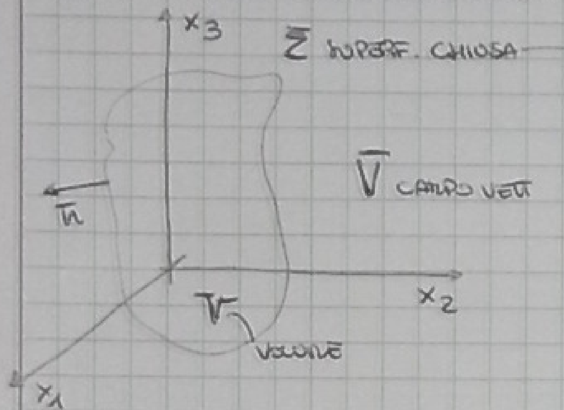
INT. SUP. CAMPO VETTORIALE

richiede il versore normale alla superficie $\vec{n}$, dato dal prod. vett dei 2

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\|}$$

$$\int_{\Sigma} \bar{V} \cdot \bar{n}\, ds = \iint_{u,v} \vec{V}(\bar{x}(u,v)) \cdot \bar{n} \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\| du\,dv \quad \text{(FLUSSO)}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA



se calcolo

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \bar{V} \cdot \bar{n} \, ds = \int_{V} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \underbrace{dx_1 \, dx_2 \, dx_3}_{dV}}$$

FONDAMENTALE/1

Prendiamo un $\bar{V} = (0, \underset{\uparrow}{\phi}, 0)$ ← i-esima $\quad V_i = \phi$

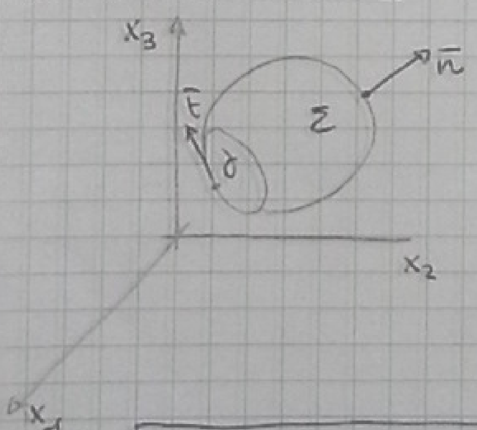
$V_j = 0 \quad i \neq j$

↓

avrò che

$$\oint_{\Sigma} \phi \, n_i \, ds = \int_{V} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

TEOREMA DEL ROTORE (Stokes)



γ linea

Σ superficie

$\bar{n}$ e $\bar{t}$ sono concordi secondo la mano destra

Prendiamo campo vett $\bar{V}$ e vale che

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\bar{\nabla} \wedge \bar{V}) \cdot \bar{n} \, ds = \int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{t} \, dl}$$

FONDAMENTALE/2

Cambiando le diciture

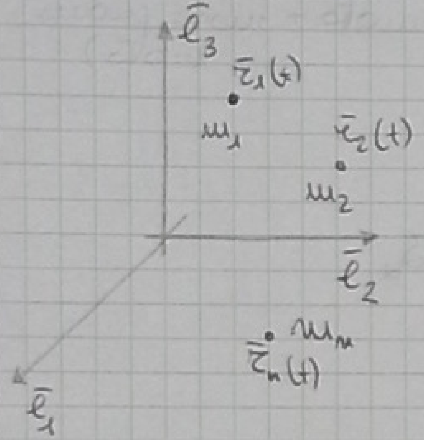
$$\int_{\Sigma} \varepsilon_{ksj} \frac{\partial v_j}{\partial x_s} n_k \, dS = \int_{\gamma} v_k t_k \, dl$$

scelgo $\begin{cases} v_i = \phi \\ v_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$ $\quad v_j = \phi \, \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\int_{\Sigma} \varepsilon_{ksj} \frac{\partial \phi}{\partial x_s} \delta_{ij} n_k \, dS = \int_{\gamma} v_i t_i \, dl$$

$$\left[\int_{\Sigma} \varepsilon_{ksi} \frac{\partial \phi}{\partial x_s} n_k \, dS = \int_{\gamma} v_i t_i \, dl \right]$$

MECCANICA DI UN SYSTEMA DI PUNTI MATERIALI



N punti materiali liberi di muoversi

i, j, k componenti

α, β, γ particelle   massa m_α
posiz. r_α

sono liberi
di muoversi dunque
la posizione è funz. del tempo.

$\bar{v}_\alpha(t)$, $\bar{a}_\alpha(t)$

Facciamo 2 casi diversi

1) VALGONO LE SEGUENTI IPOTESI:

- $\bar{a}_\alpha = 0$ se $\bar{F}_\alpha = 0$ 1^ legge d. dinamica
- $\bar{F}_\alpha = m_\alpha \bar{a}_\alpha$ 2^ legge d. dinamica
- $\bar{F}_{\alpha\beta} = -\bar{F}_{\beta\alpha}$

  $\bar{F}_{\alpha\beta} \parallel \bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta$

  } La forza esercit. dall'una sull'altra è uguale opposta a quella reciproca e diretta lungo la congiungente   3^ legge d. dinamica

2) VALGONO LE SEGUENTI IPOTESI

- $a_\alpha = 0$ se $F_\alpha = 0$

$\bar{F}_\alpha = m_\alpha \bar{a}_\alpha$

$$\bar{F}_\alpha^{int} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_\alpha}$$

Consideriamo il 1° modo di descrivere le interazioni fra particelle

Dalle 2 due ipotesi si possono ricavare le 2 equazioni cardinali (cons. quant. moto + mom. quant. moto)

1ª EQUAZIONE CARDINALE

Per 1 sing. particella avrò

$\overline{F}_\alpha^{TOT} = m\overline{a}_\alpha$ la $\overline{F}_\alpha^{TOT} = \overline{F}_\alpha^{EST} + \overline{F}_\alpha^{INT} = m_\alpha \overline{a}_\alpha$

$\overline{F}_\alpha^{INT}$ la posso scrivere come somma dei vari contributi delle sing. particelle ← applicato dalle altre n-1 particelle

$$\boxed{\overline{F}_\alpha^{INT} = \sum_{\beta \neq \alpha} \overline{F}_{\beta\alpha}}$$

Consideriamo di "sommare" tutto ciò a tt le particelle, ovvero fare $\sum_\alpha$ di entrambi i membri

$$\underbrace{\sum_\alpha \overline{F}_\alpha^{EST}}_{\overline{F}^{EST}} + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \overline{F}_{\beta\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \overline{a}_\alpha \quad \text{VALIDA x L'INTERO SISTEMA}$$

$\overline{F}^{EST}$ forza esterna totale

$$\sum_\alpha m_\alpha \frac{d}{dt}\overline{V}_\alpha = \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\sum_\alpha m_\alpha V_\alpha\right]}_{\text{QUANT. MOTO TOTALE DEL SISTEMA } P}$$

dunque

$$\overline{F}^{EST} + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \overline{F}_{\beta\alpha} = \frac{d}{dt}\overline{P}$$

proviamo a scriverlo con la 3ª legge della dinamica

$$= -\sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \overline{F}_{\alpha\beta} \quad \text{scambio gli indici come nome} \quad = \sum_\beta \sum_\alpha \overline{F}_{\beta\alpha}$$

l'ordine delle $\overline{\Sigma}$ non cambia nulla

è l'opposto di quello che avevo prima

↓

VALE ZERO

$(x = -x \text{ se } x = 0)$

Dunque qst doppia sommatoria è nulla

Da cui $\boxed{\overline{F}^{EST} = \dfrac{d\overline{P}}{dt}}$ 1ª EQUAZIONE CARDINALE

FRACCASSO

- Se la $\overline{F}^{EST}$ totale è nulla, allora $\overline{P}$ è costante (conservaz. quant. moto $\overline{P}$)
  ↳ sommatoria di tutte le forze

Posso riscrivere la 1ª EC con il centro di massa definendo

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \overline{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

e dunque potrò scrivere

$$\frac{d}{dt}\overline{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha}\sum_\alpha m_\alpha \frac{d}{dt}\overline{r}_\alpha = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \overline{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\overline{P}}{M}$$ → massa totale

da cui $\overline{P} = M\frac{d\overline{r}_{cm}}{dt} \Rightarrow \boxed{\overline{F}^{EST} = M\frac{d^2\overline{r}_{cm}}{dt}}$ ALTRA FORMA DELLA 1ª EQ. CARD (2ª eq. estesa a tutti i corpi)

2ª EQUAZIONE CARDINALE

Definiamo il momento della quant. moto come

$$\overline{L}_\alpha = (\overline{r}_\alpha - \overline{r}_0)\wedge \underbrace{m_\alpha \overline{v}_\alpha}$$ PER LA SINGOLA PARTICELLA

POSIZ. PART. ALFA

POSIZ. DEL POLO RISP. AL QUALE CALCOLO IL MOMENTO ($\overline{r}_0 = r_0(t)$)

↳ quant. moto della part. α

Per l'intero sistema avrò

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{L}_\alpha$$

l'eq. del moto della singola particella mi dice che

$$\vec{F}_\alpha^{TOT} = m_\alpha a_\alpha$$

$$\to \vec{F}_\alpha^{EST} + \sum_\beta \overline{F}_{\beta\alpha} = m_\alpha \overline{a}_\alpha$$

molt. vettorialmente per $\overline{r}_\alpha - \overline{r}_0$

$$(\overline{r}_\alpha - \overline{r}_0)\wedge \vec{F}_\alpha^{EST} + (\overline{r}_\alpha - \overline{r}_0)\wedge \sum_\beta \overline{F}_{\beta\alpha} = (\overline{r}_\alpha - \overline{r}_0)\wedge m_\alpha \overline{a}_\alpha$$

devo fare in modo di andare a conv. velocità o accelerazione →

Proviamo a fare

$$\frac{d\bar{L}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge m_\alpha \bar{v}_\alpha + (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge m_\alpha \frac{d\bar{v}_\alpha}{dt} =$$

$$= (\bar{v}_\alpha - \bar{v}_0) \wedge m_\alpha \bar{v}_\alpha + (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge m_\alpha \bar{a}_\alpha$$

ma $v_\alpha \wedge v_\alpha = \phi$

$$= -\bar{v}_0 \wedge m_\alpha v_\alpha + (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge m_\alpha \bar{a}_\alpha$$ → lo stesso di prima

dunque tornando a quello precedente, avrò

$$\underbrace{(\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \bar{\bar{F}}_\alpha^{EST}} + (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \sum_{\beta\alpha} \bar{F}_{\beta\alpha} = \frac{d\bar{L}_\alpha}{dt} + \bar{v}_0 \wedge m_\alpha \bar{v}_\alpha$$

→ momento delle forze applicate alla particella α → τ_α

$$\bar{\tau}_\alpha = (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \bar{\bar{F}}_\alpha^{EST}$$

per l'intero sistema farò la sommatoria $\bar{\tau} = \sum_\alpha \bar{\tau}_\alpha$

Facciamo sommatoria in α dell'intera espressione

$$\bar{\tau} + \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha}} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \bar{v}_0 \wedge \bar{P}$$

→ analogamente a prima, questo termine è nullo

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \bar{v}_0 \wedge \bar{P}}$$

2^ EQUAZ. CARDINALE

▽ VEDIAMO PERCHÉ

$$\bar{g} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha} = \text{ aggiungo e tolgo } \bar{r}_\beta$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \left((\bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta) + (\bar{r}_\beta - \bar{r}_0) \right) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha}$$

$$= \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} (r_\alpha - r_\beta) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha}}_{\text{nullo, in quanto } \bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta \text{ è } /\!/ \bar{F}_{\beta\alpha}} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} (\bar{r}_\beta - \bar{r}_0) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha}$$

dal 2° pezzo consideriamo $\bar{F}_{\beta\alpha} = -\bar{F}_{\alpha\beta}$, ~~scambiando gli indici~~

$$= -\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} (\bar{r}_\beta - \bar{r}_0) \wedge \bar{F}_{\alpha\beta} = \text{ cambiamo i nomi degli indici come prima}$$

$$= -\sum_{\beta} \sum_{\alpha \neq \beta} (\bar{r}_\alpha - \bar{r}_0) \wedge \bar{F}_{\beta\alpha} = -\bar{g}$$

$\hookrightarrow \bar{g} = -\bar{g} \Rightarrow \bar{g} = 0$ CVD

Abbiamo detto che

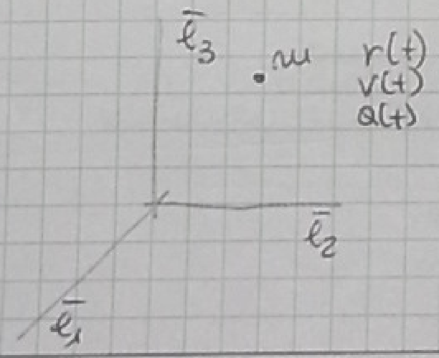
$$\bar{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \bar{V}_0 \wedge \bar{P}$$

- se il polo è fisso, $\bar{V}_0 = \emptyset$ e dunque $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$
- se $\bar{\tau} = 0$, allora $\vec{L}$ = costante e dunque ottengo la legge di conservaz. del momento della quant. di moto

---

Le interazioni fra particelle possiamo scrivere dal punto di vista energetico (2ª serie di ipotesi)

<u>RICHIAMI ELEMENTARI SULL'ENERGIA MECCANICA</u>



$$T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} \quad \text{en. cinetico}$$

Facciamone la $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dt} \right) \longrightarrow$$

$$= m\bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{v}\cdot\bar{a} = \frac{dT}{dt}$$

ma per la sing. particella $\bar{F} = m\bar{a}$

da cui

$$\frac{dT}{dt} = \bar{F}\cdot\bar{v} = \text{POTENZA}$$

Considerando di integrare fra 2 istanti avremo

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{dT}{dt} = \int_{t_A}^{t_B}\bar{F}\cdot\bar{v}\,dt$$

$$T(t_B) - T(t_A) = \underbrace{\int_{t_A}^{t_B}\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt}_{\text{INT. LINEA DI UN CAMPO VETTORIALE}} \qquad \int_{\gamma}\bar{F}\cdot\bar{t}\,dl$$

$= $ LAVORO TOT PER ANDARE DA A A B LUNGO γ

Il lavoro di una forza è uguale alla differenza di energia cinetica

$$\boxed{L_{AB} = T(t_B) - T(t_A)}$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

Ho dei casi particolari, ad esempio ho un CAMPO CONSERVATIVO

es. campo gravitazionale

- Un campo di forze $\bar{F}$ si dice conservativo se si può scrivere come $\bar{F} = -\bar{\nabla}U$ (gradiente di una funzione scalare)

U → energia potenziale del campo di forze.

È EQUIVALENTE DIRE CHE

1) $\bar{F}$ è CONSERVATIVO : $\bar{F} = -\nabla U$

2) $\bar{\nabla}\wedge\bar{F} = 0$ ROT NULLO, se domini semplicemente connessi

3) $\oint_{\gamma}\bar{F}\cdot\bar{t}\,dl = 0 \quad \forall\gamma$

→ se trovo uno di questi solo → campo conservativo

Se il campo è conservativo, L_{AB} può essere scritto come

$$L_{AB} = \int_{\gamma} \bar F \cdot \bar t \, dl = \int_{t_A}^{t_B} \bar F \cdot \frac{d\bar r}{dt} \, dt$$ sost. ad $\bar F \to \bar\nabla U$, da cui

$$= -\int_{t_A}^{t_B} \bar\nabla U \cdot \frac{d\bar r}{dt}$$ = mettiamo le rispettive componenti

$$= -\int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}}_{\downarrow} \, dt = -\int_{t_A}^{t_B} \frac{dU}{dt} \, dt = U(t_A) - U(t_B)$$

↳ A è in quanto tolgo il (-) fuori

$\frac{\partial U}{\partial t}$ (è der. composta)

Dunque: se il campo è conservativo $\boxed{L_{AB} = U(t_A) - U(t_B)}$

da cui, eguagliando al TEO F.VIVE, ottengo

$$U(t_A) - U(t_B) = T(t_B) - T(t_A)$$

$$\to U(t_A) + T(t_A) = U(t_B) + T(t_B)$$

CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

CAMPO CONSERVATIVO $\Longrightarrow$ CONSERVAZ. EN. MECCANICA

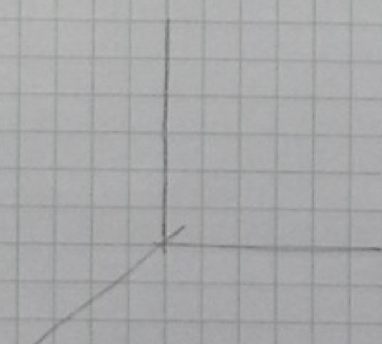
Torniamo al sys di N punti materiali. Consideriamo la 2ª serie di ipotesi

1) 1ª LEGGE D. DINAMICA $\bar a = 0$ se $\bar F = 0$

2) 2ª LEGGE D. DINAMICA $\bar F = m\bar a$

3) le forze interne delle part. è conservativa $\to \bar F_\alpha^{INT} = -\dfrac{\partial U(\bar r_1, \bar r_2 \dots \bar r_n)}{\partial \bar r_\alpha}$

tiene conto di tutte le particelle



5.1

FISICA DEI MAT

$$\bar{F}_\alpha^{INT} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_\alpha}$$

L'energia pot. rimane costante se traslo tutte quante le particelle di una stessa quantità:

$$U(\bar{r}_1+\bar{a}, \bar{r}_2+\bar{a}, \dots) = U(\bar{r}_1, \bar{r}_2 \dots)$$

OMOGENEITÀ D. SPAZIO

~~Se ruoto l'intero sistema~~ stesse

ISOTROPIA D. SPAZIO

ruotando tt il sys in modo rigido le interaz. fra le particelle non cambiano

$$U(R\bar{r}_1, R\bar{r}_2 \dots) = U(\bar{r}_1, \bar{r}_2 \dots)$$

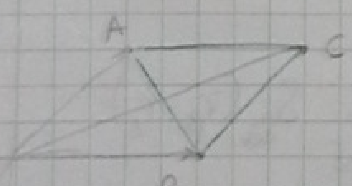
Devo rappresentare la U in modo che entrambe siano effettivamente verificate. Devo andare ad usare argomenti della U

↳ considero tutte le poss. distanze scalari fra le varie particelle

$$U = (\{r_{\beta\delta}\})$$

Se sono note tutte le possibili $r_{\beta\delta}$ allora si possono ricostruire tutte le possibili posizioni a meno di una roto-traslazione.

(CHIARO)



Conosco i lati del triangolo se ruoto o traslo rimane sempre lui.

Abbiamo detto che

$$\bar{F}_\alpha^{INT} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_\alpha} = -\sum_{\beta\delta}\frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}}\frac{\partial r_{\beta\delta}}{\partial \bar{r}_\alpha} \rightsquigarrow -\sum_\beta\sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}}\frac{\partial r_{\beta\delta}}{\partial \bar{r}_\alpha} =$$

$$= -\sum_\beta\sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}_\alpha}\sqrt{(\bar{r}_\beta - \bar{r}_\delta)\cdot(\bar{r}_\beta - \bar{r}_\delta)} = \longrightarrow$$

↳ modulo di $\bar{r}_\beta - \bar{r}_\delta$

$$= -\sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \cdot \frac{1}{2 r_{\beta\delta}} \frac{\partial}{\partial \bar r_\alpha}\left[(\bar r_\beta - \bar r_\delta)(\bar r_\beta - \bar r_\delta)\right] =$$

KRONECKER

$$= -\sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \cdot \frac{1}{\cancel{2} r_{\beta\delta}} \cancel{2}\left(\delta_{\beta\alpha} - \delta_{\delta\alpha}\right)(\bar r_\beta - \bar r_\delta)$$

da cui

$$\boxed{\bar F_\alpha^{INT} = -\sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}}\left(\delta_{\beta\alpha} - \delta_{\delta\alpha}\right)(\bar r_\beta - \bar r_\delta)}$$ ESPR. + GENERALE

Usiamo queste F per andare a ricalcolare le 1° 2 equaz. cardinali (stiamo fac. 2e serie di ipotesi) come abb. fatto ieri

$$\bar F_\alpha^{INT} + \underbrace{\bar F_\alpha^{EST}}_{\text{ARBITRARIE}} = m_\alpha \bar a_\alpha \implies \sum_\alpha \text{ faccio somma in } \alpha$$

$$\underbrace{\sum_\alpha \bar F_\alpha^{INT}}_{\text{devo vedere quanto vale}} + \bar F^{EST} = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d \bar v_\alpha}{dt} = \frac{d \bar P}{dt}$$

$$-\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \cdot \frac{1}{r_{\beta\delta}}\left(\delta_{\beta\alpha} - \delta_{\delta\alpha}\right)(\bar r_\beta - \bar r_\delta) = \bar x = (\text{sue. la tonda})$$

$$= -\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}} \delta_{\beta\alpha}(\bar r_\beta - \bar r_\delta) + \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}} \delta_{\delta\alpha}(\bar r_\beta - \bar r_\delta)$$

mettiamo α al posto di β e α al posto di δ

$$= -\sum_\alpha \sum_\delta \frac{\partial U}{\partial r_{\alpha\delta}} \frac{1}{r_{\alpha\delta}} \delta_{\alpha\alpha}(\bar r_\alpha - \bar r_\delta) + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\alpha}} \frac{1}{r_{\beta\alpha}} \delta_{\alpha\alpha}(\bar r_\beta - \bar r_\alpha)$$

nella seconda parte, se al posto di α metto δ e al posto di β metto α $\to$ ottengo $\varnothing$ — i 2 pezzi vengono ug. cambiati di segno

Consideriamo ora anziché le equaz. moto, il mom. delle quant. moto per ricavare la 2ª eq. card.

$$\sum_\alpha^{tre} (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \bar F_\alpha^{INT} + (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \bar F_\alpha^{EST} = (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge m_\alpha \bar a_\alpha$$

è mom. angolare della part. α $\longrightarrow$ facciamone $\frac{d}{dt}$ $\rightarrow$ $\frac{d\bar L}{dt} = \overbrace{(\bar V_\alpha - \bar V_0)\wedge m_\alpha \bar a_\alpha}^{=0} + (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge m_\alpha \bar a_\alpha$

da cui

$$(\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge m_\alpha \bar a_\alpha = \frac{d\bar L_\alpha}{dt} + \bar V_0 \wedge m_\alpha \bar a_\alpha$$ e poi lo inserisco nell'eq. in alto

$$(\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \bar F_\alpha^{INT} + (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \bar F_\alpha^{EST} = \frac{d\bar L_\alpha}{dt} + \bar V_0 \wedge m_\alpha \bar a_\alpha$$ facciamo ora somma in α

$$\underbrace{\sum_\alpha (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \bar F_\alpha^{INT}}_{} + \bar\tau = \frac{d\bar L}{dt} + \bar V_0 \wedge \bar P$$

↳ VERIFICHIAMO SE VA A $\varnothing$ COME IERI, chiamiamo $\bar g$

$$\bar g = -\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}} (\delta_{\beta\alpha} - \delta_{\delta\alpha})(\bar r_\beta - \bar r_\delta) =$$ dividiamo in 2 la sommatoria

$$= -\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}} \delta_{\beta\alpha} (\bar r_\beta - \bar r_\delta) +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\delta (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\delta}} \frac{1}{r_{\beta\delta}} \delta_{\delta\alpha} (\bar r_\beta - \bar r_\delta) =$$

scambio β e α e δ e α (1ª parte e 2ª parte) per eliminare i $\delta_{\beta\alpha}$ e $\delta_{\delta\alpha}$

$$= -\sum_\alpha \sum_\delta (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \frac{\partial U}{\partial r_{\alpha\delta}} \frac{1}{r_{\alpha\delta}} (\bar r_\alpha - \bar r_\delta) +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta (\bar r_\alpha - \bar r_0)\wedge \frac{\partial U}{\partial r_{\beta\alpha}} \frac{1}{r_{\beta\alpha}} (\bar r_\beta - \bar r_\alpha)$$ ~~vengono~~ ~~cattiva~~

fac. prod. vettore → 0 ↳ $(\bar r_\alpha + \bar r_\beta) - (\bar r_\beta + \bar r_0)$ → rimane solo lui

Scambiamo ora i nomi agli indici e i 2 pezzi rimangono identici, da cui l'intera espressione è nulla

↳ ottengo dunque la 2ª eq. cardinale uguale a ieri

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{V}_O \wedge \bar{P}}$$

2ª equaz. CARDINALE <u>CVD</u>

Posso anche scrivere una espr. del bilancio energetico del sistema

<u>EQUAZIONE DELL'ENERGIA</u>

$$\bar{F}_\alpha^{INT} + \bar{F}_\alpha^{EST} = m_\alpha \bar{a}_\alpha$$

$$-\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} + \bar{F}_\alpha^{EST} = m_\alpha \bar{a}_\alpha$$

$$-\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} \cdot \bar{V}_\alpha + \bar{F}_\alpha^{EST} \cdot \bar{V}_\alpha = m_\alpha \bar{a}_\alpha \cdot \bar{V}_\alpha$$

faccio somma su α ed integro

$$-\sum_\alpha \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial U}{\partial r_\alpha} \cdot \bar{V}_\alpha \, dt + \sum_\alpha \underbrace{\int_{t_A}^{t_B} \bar{F}_\alpha^{EST} \frac{d\bar{r}_\alpha}{dt} dt}_{\text{INT. LINEA DI F LUNGO LA TRAIETT. DELLA PART. } \alpha} = \sum_\alpha \int_{t_A}^{t_B} m_\alpha \frac{d\bar{V}_\alpha}{dt} \cancel{dt} \bar{V}_\alpha \, dt$$

$\to \frac{dU}{dt}$ VARIAZ. EN. POT. DEL SISTEMA FRA I 2 ISTANTI

↳ LAVORO F. ESTERNE FRA I 2 ISTANTI

$$-\int_{t_A}^{t_B} \frac{dU}{dt} dt + \sum_\alpha \int_{\gamma_\alpha} \bar{F}_\alpha^{EST} \cdot \bar{t} \, dl = \sum_\alpha \int_{t_A}^{t_B} m_\alpha \underbrace{\frac{1}{2} \, d/dt \, (\bar{V}_\alpha \cdot \bar{V}_\alpha)}_{} dt$$

$\to \frac{1}{2}\left(\frac{dv_\alpha}{dt} v_\alpha + v_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt}\right)$

$$U(t_A) - U(t_B) + L_{AB}^{EST} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dT}{dt} dt =$$

$$U(t_A) - U(t_B) + L_{AB}^{EST} = T(t_B) - T(t_A) \longrightarrow$$

$$\boxed{\left[T(t_B)+U(t_B)\right]-\left[T(t_A)+U(t_A)\right]=L^{EST}_{AB}}$$

la variaz. di en. meccanica è uguale al lavoro delle forze esterne.

Può essere vista come 1° p. termodinamica senza var. termiche (e senza var. microscop.)

→ se volessimo far sì che sia proprio 1° principio, dovrei fare

$$\left[T_{micro}(t_B)+T_{macro}(t_B)+U(t_B)\right]-\left[T_{micro}(t_A)+T_{macro}(t_A)+U(t_A)\right]=L^{EST}+Q^{EST}$$

ESEMPI VARI (quelli che avrei dovuto fare a casa)

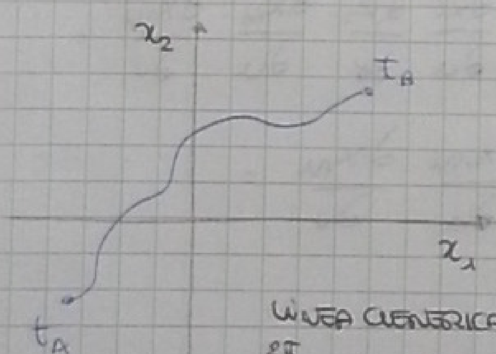
Calcolo della lungh. di una circonferenza sfruttando il calcolo della lungh. della linea.

Lungh. linea $L=\int_{t_A}^{t_B}\left\|\frac{d\bar{x}}{dt}\right\|dt$

$\bar{x}=\bar{x}(t)\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=x_2(t)\end{cases}$

dipende da 1 solo parametro.

mettiamoci nel piano



$$\rightarrow L=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}\,dt$$

LINEA GENERICA

la circonferenza dove $\begin{cases}x_1=R\sin t\\x_2=R\cos t\end{cases}$

da cui $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{d(R\sin t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(R\cos t)}{dt}\right)^2}\,dt=$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2(\cos^2+\sin^2)}\,dt=\int_0^{2\pi}R\,dt=R(2\pi-0)=2\pi R$$

CVD

CALCOLIAMO LA SUP. EST. DI UNA SFERA

~~...~~ la superficie l'avevamo scritta come $\bar{x} = \bar{x}(u,v)$

L'area della sup. era

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

posso scriverla in un altro modo

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\|^2 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right)$$

Posso esprimere i prod. vettoriali con simbolo di Levi-Civita

$\bar{a} \wedge \hat{b} = \varepsilon_{kij}\, a_i b_j \bar{e}_k$ ...iamole e entrambe le parti

SOMMA DEL PROD. VETT.

$$= \varepsilon_{kij} \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial v} \cdot \varepsilon_{knm} \frac{\partial x_n}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial v}$$

SOMMA DEL PROD. SC.

avevamo anche detto che vale le proprietà x cui

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}$$

da cui

$$= \left(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}\right) \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_n}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial u} =$$

$$= \delta_{in}\delta_{jm} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_n}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial u} - \delta_{im}\delta_{jn} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_n}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} =$$

$$= \frac{\partial x_n}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} \frac{\partial x_n}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} - \frac{\partial x_m}{\partial u} \frac{\partial x_n}{\partial v} \frac{\partial x_m}{\partial u} \frac{\partial x_n}{\partial v} =$$

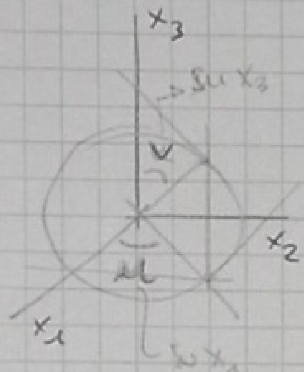
$$= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right)^2$$

dunque posso scrivere la superficie come

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \quad \text{dove} \quad \begin{cases} E = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = G \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = F \end{cases}$$

applichiamolo alla sfera

Sfera in rapp. parametrica



$$\begin{cases} x_1 = R \sin v \cos u \\ x_2 = R \sin v \sin u \\ x_3 = R \cos v \end{cases}$$

$v = 0 \div \pi \qquad u = 0 \div 2\pi$

$\cancel{E = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}}$ servono $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$: calcoliamoli

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -R \sin v \sin u \,\bar{e}_1 + R \sin v \cos u \,\bar{e}_2 + \emptyset$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = R \cos v \cos u \,\bar{e}_1 - R \sin v \cos u \,\bar{e}_2 + R \cos u \,\bar{e}_3$$

da cui

$$E = \left(-R \sin v \sin u + R \sin v \cos u\right)^2 = (\text{ma in realtà})$$

$$= R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \sin^2 v \cos^2 u - \cancel{2R^2 \sin^2 v \sin u \cos u} \quad \text{ok} \quad = R^2 \sin^2 v$$

$$G = \left(R \cos v \cos u - R \sin v \cos u + R \cos u\right) = (\text{no})$$

$$= R^2 \cos^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \cos^2 u - \quad \text{ok} \quad = R^2$$

$$\cancel{- 2R^2 \cos v \sin v \cos^2 u + 2R^2 \cos v \cos^2 u - 2R^2}$$

$F = 0$

ottengo $\cancel{EF} = EG = R^4 \sin^2 v$ da cui

$$\iint_D \sqrt{R^4 \sin^2 v}\, du\, dv = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin v \, du\, dv = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin v \, dv =$$

$$= 2\pi R^2 \left(-\cos v\right)\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2$$